高二下數學期末考總複習

宗翰・程皓老師

機率的基本概念(1)

投擲三個相同的銅板一次，以A表示恰好出現二次正面的事件，以B表示至少出現二次正面的事件，以C表示至少出現一次正面的事件，試求A、B、C三事件的發生機率。

◎（法一）樣本空間觀察法

將所有的樣本空間寫出後，再計算其發生機率。

$S=\{$正正正, 正正反, 正反正, 反正正, 正反反, 反正反, 反反正, 反反反$\}$

$A=\{$正正反, 正反正, 反正正$\}$

$B=\{$正正正, 正正反, 正反正, 反正正$\}$

$C=\{$正正正, 正正反, 正反正, 反正正, 正反反, 反正反, 反反正$\}$

由上列式子可知$n(S)=8$，$n(A)=3$，$n(B)=4$，$n(C)=7$

故可得$P(A)=\frac{3}{8}$，$P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{7}{8}$

機率的基本概念(1)

投擲三個相同的銅板一次，以A表示恰好出現二次正面的事件，以B表示至少出現二次正面的事件，以C表示至少出現一次正面的事件，試求A、B、C三事件的發生機率。

◎（法二）排列組合計算法

將所有情況的排列數寫出後，再計算其發生機率。

$n(S)=2\times2\times2=2^3=8$（丟三次，每次結果為正或反的排列數）

$n(A)=\dfrac{3!}{2!}=3$（正、正、反的排列數）

$n(B)=\dfrac{3!}{2!}+1=4$（正、正、反的排列數，再加上全正的排列數）

$n(C)=2^3-1=7$（丟三次的排列數，再扣掉全負的排列數）

故可得 $P(A)=\dfrac{3}{8}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{7}{8}$

機率的基本概念(2)

袋中有白球、紅球、黑球各3個，且每球被取出的機會均等。今自袋中一次取出二球，若二球不同色的事件為A，試求$P(A)$。

◎寫出樣本空間與事件的方法數

$n(S)=C_2^9$（從9相異球中任取2球的方法數）

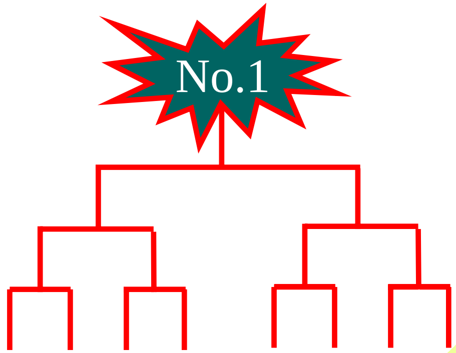
$n(A)=C_1^3\times C_1^3+C_1^3\times C_1^3+C_1^3\times C_1^3$（2球不同色的方法數）

◎再計算事件發生的機率

$$\therefore P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{C_1^3\times C_1^3+C_1^3\times C_1^3+C_1^3\times C_1^3}{C_2^9}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

機率的基本概念(3)

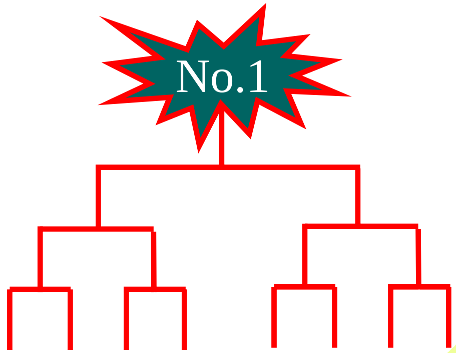
有A、B、C、⋯、H八個隊伍如右圖之賽程表安排賽程。若A隊實力最強、B隊次之，則在任意安排的情況下，A隊能得冠軍而B隊能得亞軍之機率為何？



◎分析

1. A隊實力最強，故不論賽程表如何安排，最後一定會得冠軍。
2. B隊實力僅次於A隊，但賽程表的安排會影響B隊能不能得亞軍，因為如果B隊在最後決賽前就與A隊相遇，則會落敗而無法晉級至最後決賽。故要使A隊得冠軍而B隊得亞軍，則八隊任意分成兩大組比賽時，A、B兩隊須在不同大組。

有A、B、C、…、H八個隊伍如右圖之賽程表安排賽程。若A隊實力最強、B隊次之，則在任意安排的情況下，A隊能得冠軍而B隊能得亞軍之機率為何？



◎ （法一）分堆分配計算法

1. 先將八隊任意分成兩大組，再將兩大組分成(2, 2)兩小組

$$\Rightarrow n(S)=\frac{C^8_4C^4_4}{2\,!}\times(\frac{C^4_2C^2_2}{2\,!})^2$$

2. 其中A、B要在不同大組，故各選三隊分別與A、B兩隊組成兩大組，再將兩大組分成(2, 2)兩小組

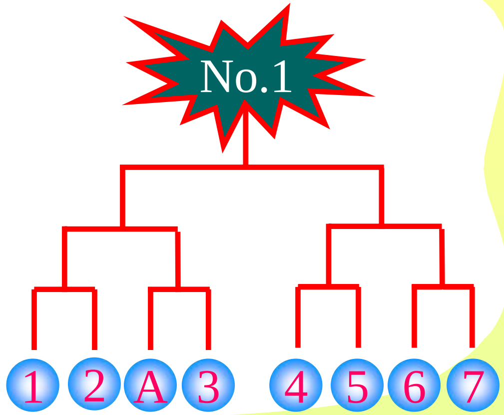
$$\Rightarrow C^6_3\times C^3_3\times(\frac{C^4_2C^2_2}{2!})^2$$

3. 再求出機率

計算太複雜了吧?!

機率的基本概念(3)

有A、B、C、…、H八個隊伍如右圖之賽程表安排賽程。若A隊實力最強、B隊次之，則在任意安排的情況下，A隊能得冠軍而B隊能得亞軍之機率為何？



◎ （法二）機率基本觀念

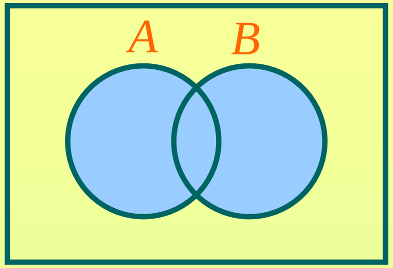
1. 先將A分配到第一大組
2. 將B分配到第二大組，才有機會在最後一場與A對決取得亞軍，因此只能將B安排在1, 2, 3, 4, 5, 6, 7這七個位置中的4, 5, 6, 7

   故B得亞軍的機率為 $P=\dfrac{4}{7}$

事件之間的關係

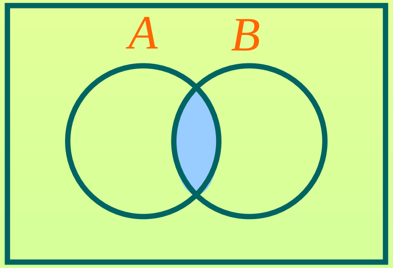
<u>和事件</u>

$A \cup B$表示由事件A和事件B的所有樣本構成的事件，稱為A和B的和事件。



<u>積事件</u>

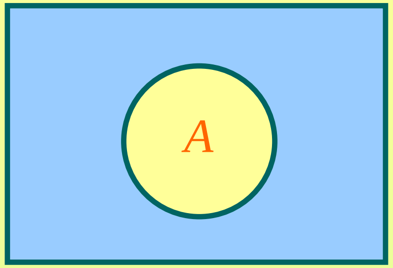
$A \cap B$表示由事件A和事件B的共有樣本構成的事件，稱為A和B的積事件。



事件之間的關係

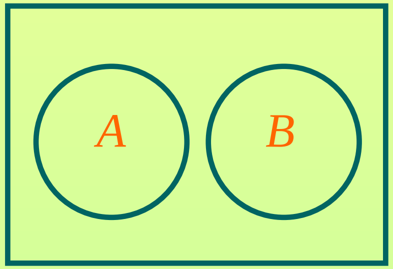
<u>餘事件</u>

A'表示不在事件A中的所有樣本構成的事件，稱為A的餘事件。



<u>互斥事件</u>

若$A \cap B = \phi$，則稱A、B互斥或稱A、B為互斥事件，意即事件A和事件B不可能同時發生。



集合運算公式

<u>聯集與交集的分配律</u>

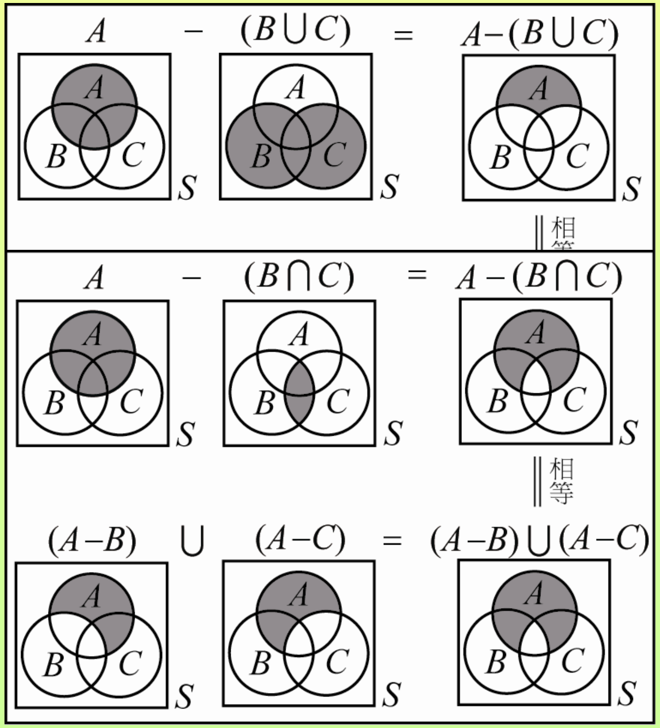
1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

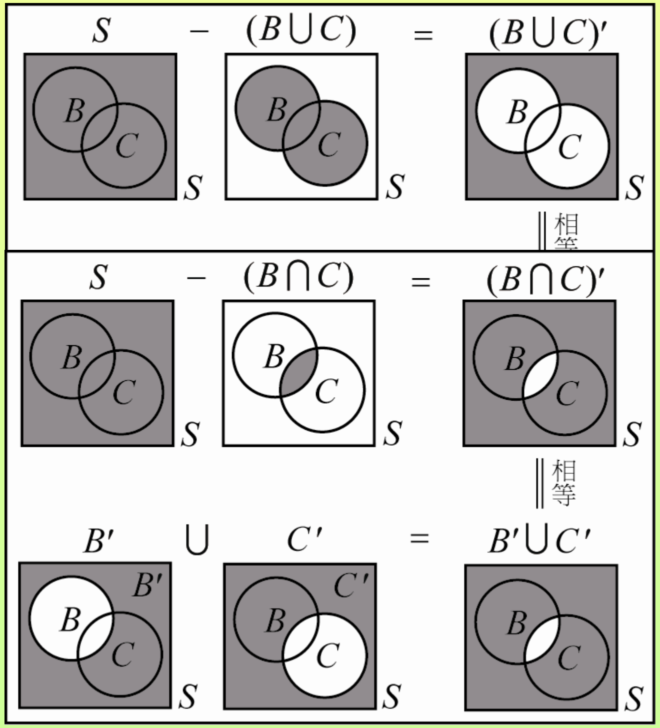
2. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

集合運算公式

狄莫根律

1. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\underset{\text{將}A\text{視為宇集}}{\Rightarrow}(B\cup C)'=B'\cap C'$



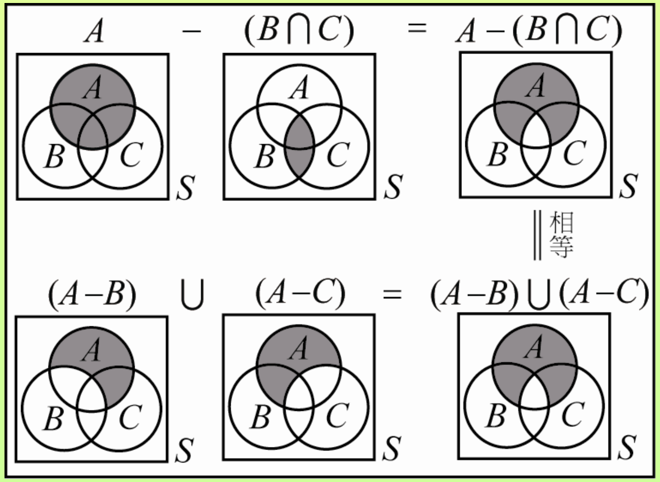


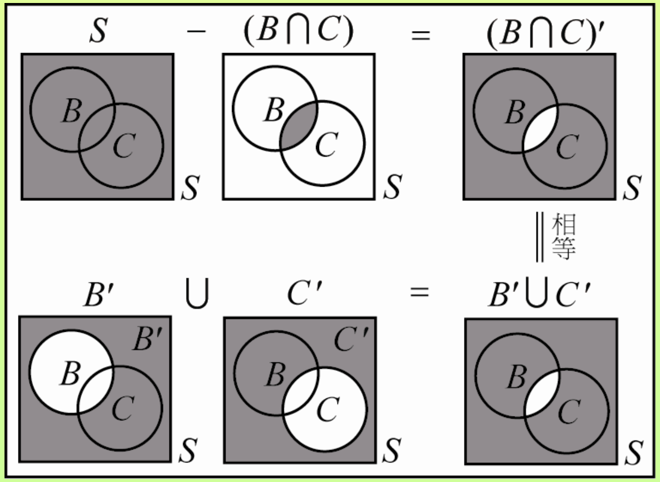
集合運算公式

<u>狄莫根律</u>

1. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\underset{\text{將}A\text{視為宇集}}{\Rightarrow}(B\cup C)'=B'\cap C'$

2. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\underset{\text{將}A\text{視為宇集}}{\Rightarrow}(B\cap C)'=B'\cup C'$





集合運算公式

狄莫根律

1. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\underset{\text{將}A\text{視為宇集}}{\Rightarrow}(B\cup C)'=B'\cap C'$

$\Rightarrow$聯集的補集等於補集的交集

2. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\underset{\text{將}A\text{視為宇集}}{\Rightarrow}(B\cap C)'=B'\cup C'$

$\Rightarrow$交集的補集等於補集的聯集

投擲一粒不公正的骰子，若各點數出現之機率與該點數成正比，試求出現偶數點的事件之機率。

◎由題目所給的條件求出各點的機率

令$P(k)$表示出現點數為k的機率

$$\Rightarrow \begin{cases} P(1):P(2):P(3):P(4):P(5):P(6)=1:2:3:4:5:6 \\ P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1 \end{cases}$$

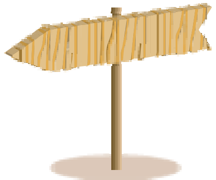
$$\Rightarrow P(1)=\frac{1}{21}，P(2)=\frac{2}{21}，P(3)=\frac{3}{21}，P(4)=\frac{4}{21}，P(5)=\frac{5}{21}，P(6)=\frac{6}{21}$$

◎再依題意求出偶數點的機率

$$\therefore P(\text{偶})=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{4}{7}$$

排列組合的基本應用(1)

甲、乙、丙三人猜拳，假設三人出3種拳（剪刀、石頭、布）的機會均等，求三人猜一次拳不分勝負的機率。



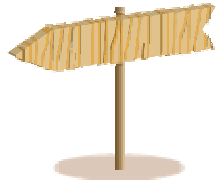
◎分析

不分勝負有二種情形：

1. 三人皆出不同的樣式。
2. 三人皆出相同的樣式。

排列組合的基本應用(1)

甲、乙、丙三人猜拳，假設三人出3種拳（剪刀、石頭、布）的機會均等，求三人猜一次拳不分勝負的機率。



◎求出各種情形的方法數，再求出機率

令樣本空間為$S \Rightarrow n(S)=3\times3\times3=3^3$

三人皆出不同樣式的事件為$A_1 \Rightarrow n(A_1)=3\times2\times1=3!$

三人皆出相同樣式的事件為$A_2 \Rightarrow n(A_2)=C_1^3$

不分勝負的事件為$A \Rightarrow n(A)=n(A_1)+n(A_2)$

故$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3!+C_1^3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

投擲一粒均勻的骰子二次，設第一次擲得點數為a點，第二次擲得點數為b點，求使聯立方程組 $\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ bx + 3y = 1 \end{cases}$ 的解為下列各情況之機率：

(1) 無限多解　(2) 無解　(3) 恰有一解

令投擲一粒均勻的骰子二次之樣本空間為S

則$n(S) = 6 \times 6 = 36$

$\because a$、b為骰子點數　$\therefore a$、b為1~6的整數

(1) 令無限多解的事件為H

若$\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ bx + 3y = 1 \end{cases}$為無限多解，則二方程式為相依方程式，即 $\dfrac{2}{b} = \dfrac{a}{3} = \dfrac{3}{1}$

$\Rightarrow b = \dfrac{2}{3}$， $a = 9$（不合）$\Rightarrow n(H) = 0$

$\therefore P(H) = \dfrac{0}{36} = 0$

投擲一粒均勻的骰子二次，設第一次擲得點數為a點，第二次擲得點數為b點，求使聯立方程組 $\begin{cases} 2x+ay=3 \\ bx+3y=1 \end{cases}$ 的解為下列各情況之機率：

(1) 無限多解　(2) 無解　(3) 恰有一解

令投擲一粒均勻的骰子二次之樣本空間為S

則$n(S)=6\times 6=36$

$\because a$、b為骰子點數　$\therefore a$、b為1~6的整數

(2) 令無解的事件為I

若$\begin{cases} 2x+ay=3 \\ bx+3y=1 \end{cases}$為無解，則二方程式為矛盾方程式，即 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{a}{3}\neq\dfrac{3}{1}$

$\Rightarrow ab=6\Rightarrow$

a	1	2	3	6
b	6	3	2	1

，共有4組 $\Rightarrow n(I)=4$

$$\therefore P(I)=\frac{n(I)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

排列組合的基本應用(2)

投擲一粒均勻的骰子二次，設第一次擲得點數為a點，第二次擲得點數為b點，求使聯立方程組 $\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ bx + 3y = 1 \end{cases}$ 的解為下列各情況之機率：

(1) 無限多解　(2) 無解　(3) 恰有一解

令投擲一粒均勻的骰子二次之樣本空間為S

則$n(S) = 6 \times 6 = 36$

$\because a$、b為骰子點數　$\therefore a$、b為1~6的整數

(3) 令恰有一解的事件為J

$\because$樣本空間使聯立方程組滿足三種情形：無限多解、無解、恰有一解

$\therefore P(J) = 1 - P(H) - P(I) = 1 - 0 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

排列組合的基本應用(3)

將A、B、C、…等9人平分成三組，求A、B在同一組的機率？

◎ **（法一）分堆分配法**

令9人平分成三組的樣本空間為S $\Rightarrow n(S)=C_3^9\times C_3^6\times C_3^3$

A、B在同一組為事件A $\Rightarrow n(A)=\underbrace{C_1^3}_{\text{選組}}\times \underbrace{C_1^7}_{\text{選1人與}A\text{、}B\text{同組}}\times C_3^6\times C_3^3$

$\therefore A$、B在同一組的機率 $=\dfrac{C_1^3C_1^7C_3^6C_3^3}{C_3^9C_3^6C_3^3}=\dfrac{1}{4}$

排列組合的基本應用(3)

將A、B、C、⋯等9人平分成三組，求A、B在同一組的機率？

◎（法二）抽球法

將題目視為箱中有3個紅球、3個白球、3個黑球，9個人依序抽球

抽到同色的即同一組

則A、B同一組的機率即A、B抽中同色球之機率

$\therefore A$、B在同一組的機率$=\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

數學期望值(1)

袋中標1號的球有1個、標2號的球有2個、標3號的球有3個、…、標n號的球有n個，設x表抽出球的號碼，若每球被抽中的機會相等，試求x的期望值。

◎求出各個號碼被抽中的機率

x表抽出之球號，$f(x)$表對應之機率

x	1	2	$\cdots$	n
$f(x)$	$f(1)$	$f(2)$	$\cdots$	$f(n)$

袋中全部球數 $=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\therefore\ f(1)=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\text{、}f(2)=\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}\text{、}\cdots\text{、}f(k)=\frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

數學期望值(1)

袋中標1號的球有1個、標2號的球有2個、標3號的球有3個、…、標n號的球有n個，設x表抽出球的號碼，若每球被抽中的機會相等，試求x的期望值。

◎再求出期望值

$$E(x)=1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)+\cdots+n\cdot f(n)$$

$$=1\cdot\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}+2\cdot\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}+3\cdot\frac{3}{\frac{n(n+1)}{2}}+\cdots+n\cdot\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=2\cdot\frac{1^2}{n(n+1)}+2\cdot\frac{2^2}{n(n+1)}+2\cdot\frac{3^2}{n(n+1)}+\cdots+2\cdot\frac{n^2}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}$$

數學期望值(2)

某人投擲二粒公正骰子，投出點數和為7點時，可領100元獎金，並可再玩至點數和不為7為止。試求參與此遊戲所得獎金的期望值。

◎先求出點數和為7的機率

投擲二粒骰子，令S為樣本空間，A為二粒骰子點數和為7的事件

則$n(S)=6^2=36$，$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}\Rightarrow n(A)=6$

$\therefore P(\text{二粒骰子點數和為}7)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

數學期望值(2)

某人投擲二粒公正骰子，投出點數和為7點時，可領100元獎金，並可再玩至點數和不為7為止。試求參與此遊戲所得獎金的期望值。

◎再求期望值

得到第1張100元的機率 $p=\frac{1}{6}$ （不論之後是否成功）

得到第2張100元的機率 $p=(\frac{1}{6})^2$ （第一次成功且第二次成功）

得到第3張100元的機率 $p=(\frac{1}{6})^3$ （連續三次成功）

則參加此遊戲可能得到的獎金為

$$\frac{1}{6}\cdot 100+(\frac{1}{6})^2\cdot 100+(\frac{1}{6})^3\cdot 100+\cdots=\frac{100}{6}\cdot[1+\frac{1}{6}+(\frac{1}{6})^2+\cdots]=\frac{100}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=20\text{（元）}$$

某班學生50人，在一次測驗中得分最高為96分、最低為33分，現將30～100分分成7組，即最小為30～40分，最大為90～100分，組距為10分，若G_1、G_2分別表這些資料所繪得的以下累積次數分配曲線及以上累積次數分配曲線，且知G_1中一點(60, 10)在G_2中的坐標為(60, y)，則y = ＿＿＿＿＿＿＿＿。

◎由定義解題

$(60, 10) \in G_1$（以下累積次數分配曲線）

即表示60分以下（不含60分）有10人

$(60, y) \in G_2$（以上累積次數分配曲線）

即表示60分以上（含60分）有y人

$\therefore$全班人數 = (60分以下人數) + (60分以上人數) = 50（人）

$\Rightarrow 10 + y = 50 \Rightarrow y = 40$

擲一粒公正骰子100次，並將其結果記錄如下：

點數	1	2	3	4	5	6
次數	10	25	20	20	10	15

設算術平均數為a分，中位數為b分，則$a-b=$？

◎由定義解題

$$a=\frac{1\times10+2\times25+3\times20+4\times20+5\times10+6\times15}{10+25+20+20+10+15}=3.4$$

又100次之中位數為依序排列後，第50個與第51個點數之算術平均數

$$\therefore b=\frac{3+3}{2}=3$$

故$a-b=3.4-3=0.4$

標準差

資料的分散程度

要表達一組資料的分散程度，可利用每個資料與中心點的距離和之大小來判斷，即 $\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{X}|$ 。

平均絕對離差

因資料的多寡會影響其值的大小，易失其參考價值，故再除以資料的個數，即 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{X}|}{n}$ 來表示資料的離散程度，稱為平均絕對離差。

標準差

變異數

由於絕對值在代數運算中不易討論，所以將平均絕對離差平方的平均，即 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}$，稱為變異數$S^2$（或$\sigma^2$）。

標準差

變異數的單位是資料單位的平方，必須加以開方後，才能與其他資料（如平均數…等）做運算（或比較），因此以變異數的開方，即 $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}}$ 來表示資料的分散程度，稱為標準差S。

標準差

某生一次月考六科的算術平均為80分，若已知其中五科的成績為68、80、80、80、86分，則該生成績的標準差為 ____________ 分。

◎分析

資料經平移後，標準差不變，即 $y_i = x_i + b \Rightarrow S_y = S_x$。

◎由定義解題

設另一科成績為a，則 $a + 68 + 80 + 80 + 80 + 86 = 80 \times 6 \Rightarrow a = 86$

即6科成績為86、68、80、80、80、86分

若各科平移（減80），則變為6、−12、0、0、0、6，且 $\overline{Y} = \overline{X} - 80 = 0$

$\therefore S_x = S_y = \sqrt{\frac{1}{6}[6^2 + (-12)^2 + 6^2]} = \sqrt{\frac{216}{6}} = 6$（分）

常態分布

有一競爭激烈的入學考試，其考生入學成績恰好為一平均數為70分、標準差為5分的常態分配，試問：

(1) 若隨機抽取一考生成績，此考生分數恰好在65與80分之間的機率為何？

(2) 若此項考試預估錄取率為16%，則你能預估上榜門檻的保險分數嗎？

$\mu = 70$，$\sigma = 5 \Rightarrow \mu + \sigma = 70 + 5 = 75$，$\mu + 2\sigma = 70 + 10 = 80$

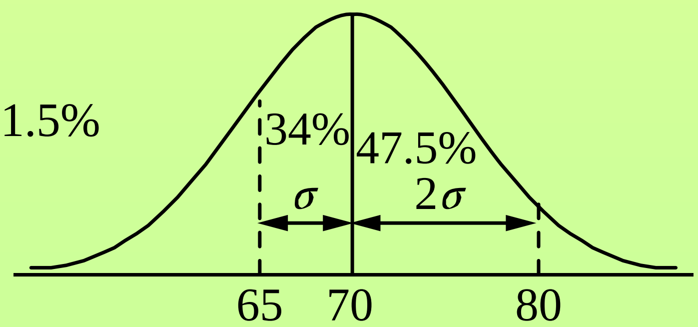
(1) $\because$ 70～80分落在$\mu \sim \mu + 2\sigma$，約占總面積的 $\frac{1}{2} \times 95\% = 47.5\%$

65～70分落在$\mu - \sigma \sim \mu$，約占總面積的 $\frac{1}{2} \times 68\% = 34\%$

又資料總量與所占面積成正比

$\therefore$ 65～80分的人約占 $47.5\% + 34\% = 81.5\%$

故任取一人分數落在65～80分之間的機率為81.5%



有一競爭激烈的入學考試，其考生入學成績恰好為一平均數為70分、標準差為5分的常態分配，試問：

(1) 若隨機抽取一考生成績，此考生分數恰好在65與80分之間的機率為何？

(2) 若此項考試預估錄取率為16%，則你能預估上榜門檻的保險分數嗎？

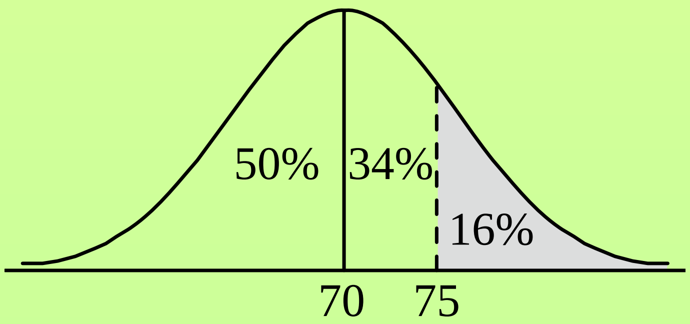
$\mu = 70$，$\sigma = 5 \Rightarrow \mu + \sigma = 70 + 5 = 75$，$\mu + 2\sigma = 70 + 10 = 80$

(2) $\because$ 70～75分落在$\mu \sim \mu + \sigma$，約占 $\frac{1}{2} \times 68\% = 34\%$

70分以下的人數約占50%

$\therefore$ 75分以上的人數約占$1 - 34\% - 50\% = 16\%$

故上榜的分數大約落在75分



信賴區間與信心水準

信賴區間

在進行估計的時候，通常會以一個區間來表示估計結果，這樣的區間就稱為信賴區間。

信賴區間的表示方法

[0.53, 0.72]：表示信賴區間介於0.53與0.72之間，即取

$$0.53 \le p \le 0.72$$ 為可信賴的範圍。

$44\% \pm 3\%$：表示信賴區間介於0.41與0.47之間，即取

$$0.41 \le p \le 0.47$$ 為可信賴的範圍。

信賴區間與信心水準

<u>信心水準</u>

實際的*p*值會落在信賴區間範圍內的機率，就稱為信心水準。

<u>95%的信心水準</u>

「95%的信心水準」所代表的涵義：抽樣所得的信賴區間有95%的機率會涵蓋真正的*p*值。

信賴區間與信心水準(1)

在某次滿意度調查中，成功訪問到1000位臺灣地區20歲以上的成年民眾，得到滿意度為57%，若在95%的信心水準下，抽樣誤差為正負3個百分點，試問：

(1) 回答滿意的有幾人？

(2) 信賴區間為何？

(1) 在1000位受訪者中，有$1000 \times 57\% = 570$人回答滿意

(2) 有95%的機率，真正的滿意度p會介在$[0.57 - 0.03, 0.57 + 0.03] = [0.54, 0.6]$
即信賴區間為$[0.54, 0.6]$

信賴區間與信心水準(2)

為了驗證一枚古硬幣是否為均勻的硬幣，某人做了多次的投擲試驗，並發表推論如下

「我們有95%的信心認為此硬幣出現正面的機率是36%到44%之間」，試求：

(1) 在此實驗中，共投擲了幾次硬幣？

(2) 其中出現幾次正面？

(1) 設總共投擲硬幣n次

$\because \dfrac{0.36+0.44}{2}=0.4$，$0.4-0.36=0.44-0.4=0.04$

故可將36%到44%表示為$0.4-0.04$到$0.4+0.04$

又95%的信賴區間為$[\hat{p}-2\sigma,\ \hat{p}+2\sigma]$，$\sigma=\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$\therefore \hat{p}=0.4$，$2\sigma=0.04$

$\Rightarrow 2\sqrt{\dfrac{0.4\times 0.6}{n}}=0.04 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{0.24}{n}}=0.02 \Rightarrow \dfrac{0.24}{n}=0.0004 \Rightarrow n=600$（次）

信賴區間與信心水準(2)

為了驗證一枚古硬幣是否為均勻的硬幣，某人做了多次的投擲試驗，並發表推論如下

「我們有95%的信心認為此硬幣出現正面的機率是36%到44%之間」，試求：

(1) 在此實驗中，共投擲了幾次硬幣？

(2) 其中出現幾次正面？

(2) 設出現正面的次數為 f_i

$$\hat{p} = \frac{f_i}{600} = 0.4 \Rightarrow f_i = 240 \text{（次）}$$

搶先預告

名師學院學院第一套學測總複習產品即將上市！

明年第一屆95課綱學測大考

名師學院特別針對您最需要的解題、名師詳解率先推出學測總複習光碟！

產品特色

1.國內第一套針對學測總複習課程、網路題庫、線上模考之全方位數位複習計畫。

2.國英數重點三科、每週每科一單元、只要黃金十二週，有效掌握學測高分關鍵。

3.逐題分析歷屆學測三科考試重點，去蕪存菁，規畫各科必考菁華架構。

4.學測落點分析、課程重要性，五等星等清楚標示，重點課程一目了然。

5.只要60分鐘，從學前剖析、焦點課程到名師詳解，觀念、解題一次搞定！

6.透過光碟學習，反覆聆聽例題詳解，加強例題練習，考前衝次一次達陣。

產品規格

國文學測總複習：12片

英文學測總複習：12片

數學學測總複習：12片

7/15 開始預購！敬請期待！

請上名師學院網站 http://www.kut.com.tw