解 依題意知，首項為$\frac{1}{2}$，則公比$=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

1° 設2^{n-3}為第k項

$$\underset{a_k}{\underset{\|}{2^{n-3}}}=(\frac{1}{2})\cdot 2\cdot 2^{n-3}=\underset{a_1\cdot r^{k-1}}{\underset{\|}{(\frac{1}{2})\cdot 2^{n-2}}}\Rightarrow n-2=k-1\Rightarrow k=n-1$$

$\therefore 2^{n-3}$為第$(n-1)$項

2° 設4^{n+1}為第t項 $\underset{a_t}{\underset{\|}{4^{n+1}}}=(2^2)^{n+1}=2^{2n+2}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2^{2n+2}=\underset{a_1\cdot r^{t-1}}{\underset{\|}{\frac{1}{2}\cdot 2^{2n+3}}}$

$\Rightarrow 2n+3=t-1\Rightarrow t=2n+4$

$\therefore 4^{n+1}$為第$(2n+4)$項

主題4 等比級數

觀念一 等比級數求和

【公式】等比級數的一般項$a_{n+1}=a_n\cdot r$，$n=1, 2, 3, \cdots$

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \text{（其中} S_n \text{表前} n \text{項之和）}$$

$$=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1}$$

$$=\begin{cases} na_1 & , r=1 \\ \dfrac{\overset{\text{首項}}{a_1}(1-\overset{\text{項數}}{r^n})}{1-\underset{\text{公比}}{r}} & , r\neq 1 \end{cases}$$

【證明】令

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1} \\ S_n &=& a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1} \\ -)\quad r\cdot S_n &=& \quad\ \ a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}+a_1r \\ \hline (1-r)S_n &=& a_1+0+0+\cdots+0+0-a_1r \end{array}$$

$$=a_1(1-r^n)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

當$r=1$，則$S_n=na_1$

當$r\neq 1$，則$S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

範例一

(1) $9+99+999+\cdots+$第n項$=$__________ (2) $0.9+0.99+0.999+\cdots+$第n項$=$__________

答 (1) $\frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-10)$　(2) $\frac{1}{9}(9n-1+\frac{1}{10^n})$

解 (1) $9+99+999+\cdots+$第n項

$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)$

$=(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-n$

$=\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n=\frac{10(1-10^n)}{-9}-n=\frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-10)$

(2) $0.9+0.99+0.999+\cdots+$第n項

$=(1-\frac{1}{10})+(1-\frac{1}{10^2})+(1-\frac{1}{10^3})+\cdots+(1-\frac{1}{10^n})$

$=n-(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n})$

$=n-\frac{\frac{1}{10}(1-\frac{1}{10^n})}{1-\frac{1}{10}}=n-\frac{(1-\frac{1}{10^n})}{9}=\frac{1}{9}(9n-1+\frac{1}{10^n})$

6-4

範例二

(1) $1+2+4+\cdots+2^n=$ ________　(2) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4+\cdots+2^{n-5}=$ ________

答 (1) $2^{n+1}-1$　(2) $\frac{1}{4}(2^{n-2}-1)$

分析 觀察次方：2^0，2^1，2^2，$\cdots$，2^n 共$n+1$項，公比為 2

解 (1) $1+2+4+\cdots+2^n$，共 $n+1$ 項

$=\frac{1\cdot(1-2^{n+1})}{1-2}=2^{n+1}-1$

(2) 公比為 2，從2^0，2^1，$\cdots$，2^{n-5}共$n-4$項，再加上$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$兩項，故共$n-2$項

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+\cdots+2^{n-5}=\frac{\frac{1}{4}(1-2^{n-2})}{1-2}=\frac{1}{4}(2^{n-2}-1)$