第 5 節　查表及對數的應用

主題 1　對數表的應用

觀念一　查表

【原理】$\log N$ 表示以 10 為底的常用對數，當$1 \le N < 10$，$N \in R \Rightarrow$利用對數表查$\log N$。

例：1. $\log 1.18 = 0.0719$

2. $\log 1.167 = 0.0671$

3. $\log a = 0.0492 \Rightarrow a = 1.12$

4. $\log b = 0.0742 \Rightarrow b = 1.186$

觀念二　$\log x(0 < x < 1$ 或 $x > 10)$的查表

【原理】$1 \le a < 10$，$k \in N$

1. $x = a \times 10^k \Rightarrow \log x = k + \log a$

例：$\log 2 = 0.301 \Rightarrow \log 20000 = \log(2 \times 10^4) = \log 2 + 4 = 4.301$

2. $x = a \times 10^{-k} \Rightarrow \log x = -k + \log a$

例：$\log 2 = 0.301 \Rightarrow \log 0.0002 = \log(2 \times 10^{-4}) = -4 + 0.301 = -3.699$

觀念三　本利和

【原理】1. 存入本金 a，利率 r，經 n 期後的本利和為$a(1+r)^n$。

2. 每期存入 a，利率 r，n 期可領回本利和$\dfrac{a(1+r)\cdot[(1+r)^n-1]}{r}$。

例：連續四期存入 a，則可領回的本利和

$$\Rightarrow a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+a(1+r)^4$$

$$=\frac{a(1+r)[(1+r)^4-1]}{(1+r)-1}=\frac{a(1+r)\cdot[(1+r)^4-1]}{r}$$

範例一

曉鳳每年年初存入銀行 3000 元，年利率 0.05，複利計算，問十年後本利和多少元？
$(\log 2 = 0.301$，$\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$，$\log 1.629 = 0.212)$

答 39627 元

分析 n 期後的本利和 $=\dfrac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}$

解 1°　(1)　(2)　(3)　⋯　(10)　　每期存 3000，共 10 期

$a=3000$，$r=0.05$，$n=10$

領回的本利和 $\dfrac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}$

$\Rightarrow 3000(1.05)+3000(1.05)^2+\cdots+3000(1.05)^{10}$

$=\dfrac{3000(1.05)[(1.05)^{10}-1]}{0.05}$ ⋯⋯①

2°　利用對數計算 $(1.05)^{10}$

$\log 1.05=\log 105-\log 100=\log 3+\log 5+\log 7-2$

$=0.4771+(1-\log 2)+0.8451-2=0.0212$

$\Rightarrow \log(1.05)^{10}=10\log 1.05=0.212=\log 1.629$

消去 log $\Rightarrow (1.05)^{10}=1.629$

3°　將 $(1.05)^{10}=1.629$ 代回①，得本利和 $=\dfrac{3000(1.05)(1.629-1)}{0.05}=39627$（元）

範例二

股票每日漲跌幅限制為 7%，若買進時股價為 40 元，連跌五日再連漲五日，則股價最接近多少元？【93 學測】

(A) 39　(B) 39.5　(C) 40　(D) 40.5　(E) 41

答 (A)

解（法一）

$$\log(0.93)^5(1.07)^5=5\log(0.93)(1.07)=5\log 0.9951=5(\log\frac{9.951}{10})=5(\log 9.951-\log 10)$$

$$=5(\log 9.951-1)=5(0.9978-1)=-0.011=-1+0.989$$

$$=\log\frac{1}{10}+\log 9.75=\log 0.975$$

$\Rightarrow (0.93)^5(1.07)^5 \fallingdotseq 0.975$

$\Rightarrow 40(0.93)^5(1.07)^5=40\times 0.975=39$

（法二）

利用二項式展開：

$(1-b)^5=1-5b+10b^2-10b^3+5b^4-b^5$

當 $b<<1$ 時，$(1-b)^5 \fallingdotseq 1-5b$

$\Rightarrow 40(0.995)^5=40(1-0.005)^5 \fallingdotseq 40(1-5\times 0.005)=40(1-0.025)=39$

（法三）

$(0.93)(1.07)=(1-0.07)(1+0.07)=1-(0.07)^2=1-0.0049$

大約是 0.995，因此每漲跌一次大約損失千分之五

那麼五次漲跌大約損失千分之二十五，也就是四十分之一
如此一來 40 元買進的股票，就變成 39 元了。

主題 2　首數與尾數

觀念一　首數與尾數

【定義】1. 將正實數 a 取常用對數（以 10 爲底）

$\Rightarrow \log a = n + \alpha$，其中 $n \in Z$（n 爲整數），$0 \le \alpha < 1$（α 爲 0 或正小數）

$$\Rightarrow \begin{cases} n \text{ 稱爲 } \log a \text{ 的首數} \\ \alpha \text{ 稱爲 } \log a \text{ 的尾數} \end{cases}$$

例：(1) $\log 2000 = 3 + 0.301$，其中 3 爲首數，0.301 爲尾數

(2) $\log(0.003) = -3 + 0.4771$，其中 -3 爲首數，0.4771 爲尾數

2. $a = b \cdot 10^n (n \in Z，1 \le b < 10)$ 科學記號表示法

$$\Rightarrow \log a = \log b \cdot 10^n = \log 10^n + \log b = \underbrace{n}_{\text{首數}} + \underbrace{\log b}_{\text{尾數}}$$

註 $\because 1 \le b < 10 \quad \therefore 0 \le \log b < 1$

範例一

$10 \le x < 100$ 且 $\log x^2$ 與 $\log \dfrac{1}{x}$ 的尾數相等，求 x。

答 10 或 $10^{\frac{4}{3}}$ 或 $10^{\frac{5}{3}}$

解 1° 假設 $\log x^2 = n_1 + \alpha \cdots\cdots ①$　$(n_1 \in Z，0 \le \alpha < 1)$

$\Rightarrow \log \dfrac{1}{x} = n_2 + \alpha \cdots\cdots\cdots ②$　（$n_2 \in Z$，又二者尾數相同）

$① - ② \Rightarrow \log x^2 - \log \dfrac{1}{x} = n_1 - n_2$

$\Rightarrow \log(\dfrac{x^2}{\frac{1}{x}}) = \log x^3 = 3\log x \in Z$　（$\because n_1 - n_2$ 爲整數）

2° $\because 10 \le x < 100 \quad \therefore 1 \le \log x < 2 \Rightarrow 3 \le 3\log x < 6$

又由1°得 $3\log x \in Z$，故 $3\log x = 3$ 或 4 或 5

$\Rightarrow \log x = 1$ 或 $\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{5}{3} \Rightarrow x = 10$ 或 $10^{\frac{4}{3}}$ 或 $10^{\frac{5}{3}}$