範例四

$x>1$，$y>1$ 且 $\log_2 x+\log_3 y=2$，求 $\log_x 2+\log_y 3$ 之最小值。

答 2

解 $\underbrace{(\log_2 x+\log_3 y)}_{a^2+b^2}\underbrace{(\log_x 2+\log_y 3)}_{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\cdots\text{柯西不等式}}\ge(1+1)^2=4$

$\log_x 2+\log_y 3\ge\dfrac{4}{\log_2 x+\log_3 y}=\dfrac{4}{2}=2$

第3節　簡易三角函數不等式

主題 1　三角函數的值域

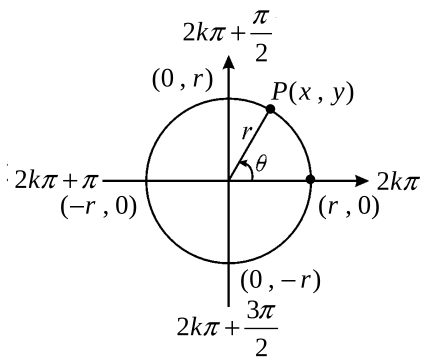
觀念一　**圖形的值域**

1. 定義：(1) 有向角規定

①以 x 軸正向爲始邊

②逆時針取正

③順時針取負



(2) 三角函數定義如下：

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$

2. 性質：函數值範圍：

(1) $|\sin\theta|\le 1$，$|\cos\theta|\le 1$

(2) $\tan\theta\in R$，$\cot\theta\in R$

(3) $|\sec\theta|\ge 1$，$|\csc\theta|\ge 1$

範例一

a，b，c 爲非零實數，若 $\sec^2\theta=\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$，求 $\dfrac{a^2+2ac}{ab-5bc}$ 及 θ。

答 $\dfrac{-3}{4}$，$\theta=n\pi$

解 $|\sec\theta|\ge 1\Rightarrow\sec^2\theta=\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 1$

$\Rightarrow ab+bc+ca\ge a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\le 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[\ (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\ ]\le 0$

$\Rightarrow a=b=c$

$1°\ \frac{a^2+2ac}{ab-5bc}=\frac{a^2+2a^2}{a^2-5a^2}=\frac{3a^2}{-4a^2}=\frac{-3}{4}$

$2°\ \sec^2\theta=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+a^2+a^2}{a^2+a^2+a^2}=1$

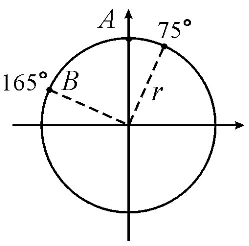
$\Rightarrow \sec\theta=\pm1 \Rightarrow \cos\theta=\pm1 \Rightarrow \theta=n\pi$

範例二

$15°\le x\le 60°$，求 $\sin(2x+45°)$ 的最大值與最小值。

答 最大值 1，最小值 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解 $15°\le x\le 60° \ \Rightarrow\ 75°\le 2x+45°\le 165°$



1° 取 A 點

$\Rightarrow 2x+45°=90°$，即 $x=22.5°$ 時

$\sin(2x+45°)$ 有最大值：$\sin 90°=1$

2° 取 B 點

$\Rightarrow 2x+45°=165°$，即 $x=60°$ 時

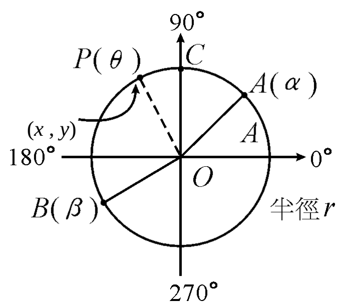
$\sin(2x+45°)$ 有最小值：$\sin 165°=\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

主題 2　正弦函數的不等式

觀念一　$\alpha\le\theta\le\beta$ 的 $\sin\theta$ 範圍

1. 原理：(1) 利用參考圓分析 $\alpha\le\theta\le\beta$

當角度 θ 由 α 增至 β 時 P 點坐標 $(x\ ,\ y)$ 由 A 點沿圓周逆時針移至 B 點（其中 $\overline{OP}$ 為角 θ 的終點）



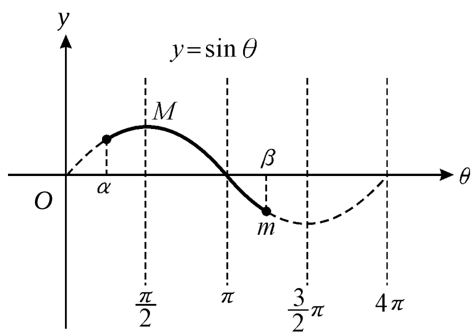
$\boxed{\sin\theta=\frac{y}{r}}$ 隨著 y 坐標而改變

在 $\theta=90°$ 時 $\sin\theta$ 最大（$\because C$ 點為最高點，y 最大）

$\theta=\beta$ 時 $\sin\theta$ 最小（$\because B$ 點為最低點，y 最小）

$\boxed{\alpha\le\theta\le\beta\ \Rightarrow\ \sin\beta\le\sin\theta\le\sin 90°}$

(2) 利用 $y=\sin\theta$ 函數圖形分析



以 θ 為橫坐標，$\sin\theta$ 值為縱坐標的 $y=\sin\theta$ 圖形

在 $\alpha\le\theta\le\beta$ 區間中可看出在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時有最大值，

而在 $\theta=\beta$ 時有最小值