(3) 由二元二次方程式的平移以消去一次項可知

$$\begin{cases} d' = 2ah + bk + d = 0 \\ e' = bh + 2ck + e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ah + bk = -d \\ bh + 2ck = -e \end{cases}$$

可解出平移向量 (h, k) 的條件為 $\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \delta = b^2 - 4ac \neq 0$

即有心錐線可消去一次項，但無心錐線無法消去一次項。

(4) 軸平移的目的：消去一次項；軸旋轉的目的：消去 xy 項

(5) 二元二次方程式標準化的原則：

無心錐線	拋物線	先旋轉後平移
有心錐線	圓、橢圓、雙曲線	先平移後旋轉

主題 4　二元二次方程式圖形的判別

觀念一　二元二次方程式圖形的判別

1. 原理：先計算 $\delta = b^2 - 4ac$

(i) $\delta > 0 \Rightarrow$雙曲線類

(ii) $\delta = 0 \Rightarrow$拋物線類

(iii) $\delta < 0 \Rightarrow$橢圓類

範例一

判別下列各方程式的圖形（$\delta > 0$，集項配方法）

(1) $x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x + 10y + 8 = 0$

(2) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y + 5 = 0$

(3) $5x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 2y + 6 = 0$

答 (1)橢圓　(2)點$(-3, 2)$　(3)無圖形

解 (1) $b^2 - 4ac = 16 - 20 < 0$

$\Rightarrow x^2 + (4y+2)x + 5y^2 + 10y + 8 = 0$

$\Rightarrow [x^2 + (4y+2)x + (2y+1)^2] + 5y^2 + 10y + 8 - (2y+1)^2 = 0$

$\Rightarrow (x+2y+1)^2 + y^2 + 6y + 7 = 0$

$\Rightarrow (x+2y+1)^2 + (y^2 + 6y + 9) - 2 = 0$

$\Rightarrow (x+2y+1)^2 + (y+3)^2 = 2$　$\therefore$橢圓

(2) $b^2 - 4ac = 2^2 - 8 < 0$

$\Rightarrow (x+y+1)^2 + (y-2)^2 = 0$

$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$　$\therefore$點 $(-3，2)$

(3) $b^2 - 4ac = 16 - 20 < 0$

$\Rightarrow (y+2x+1)^2 + (x+2)^2 = -1$　$\therefore$無圖形

範例二

判別下列各方程式的圖形：（ $\delta=0$ ，前三項爲完全平方）

(1) $x^2+2xy+y^2-4x+4y+4=0$

(2) $x^2+6xy+9y^2+x+3y-6=0$

(3) $x^2+8xy+16y^2+4x+16y+4=0$

(4) $x^2-4xy+4y^2+2x-4y+4=0$

答 (1)抛物線　(2)兩平行直線　(3)重合二直線　(4)無圖形

解 (1) $b^2-4ac=2^2-4=0$

$(x+y)^2-4(x-y-1)=0$　　$\therefore$ 抛物線

(2) $b^2-4ac=36-4\times 9=0$

$x^2+6xy+9y^2+x+3y-6=0$

$(x+3y)^2+(x+3y)-6=0$（看成 $t^2+t-6=0\Rightarrow(t+3)(t-2)=0$ ）

$(x+3y+3)(x+3y-2)=0$

$\Rightarrow x+3y+3=0$ 或 $x+3y-2=0$　　$\therefore$ 兩平行直線

(3) $b^2-4ac=8^2-4\times 16=0$

$(x+4y)^2+4(x+4y)+4=0$（看成 $t^2+4t+4=0\Rightarrow(t+2)^2=0$ ）

$(x+4y+2)^2=0\Rightarrow x+4y+2=0$　　$\therefore$ 重合二直線

(4) $b^2-4ac=4^2-16=0$

$x^2-4xy+4y^2+2x-4y+4=0$

$(x-2y)^2+2(x-2y)+4=0$（看成 $t^2+2t+4=0\Rightarrow(t+1)^2+3=0$ ）

$(x-2y+1)^2+3=0$ ， $(x+2y+1)^2=-3$　　$\therefore$ 無圖形

範例三

判別下列各方程式的圖形（ $\delta>0$ ，雙十字交乘）

(1) $x^2+4xy-5y^2+6x+6y+9=0$

(2) $x^2+2xy-3y^2+2x+10y-3=0$

答 (1)雙曲線　(2)兩相交直線 ： $(x+5y+m)(x-y+n)$

解 (1) $b^2-4ac=16+20>0$

$x^2+4xy-5y^2+6x+6y+9=0$

前三項 $\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{array}$ ： $(x+5y)(x-y)$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 5 & m \\ 1 & -1 & n \end{array} \\ \hline (m+n)x+(5n-m)y \\ \| \qquad\qquad \| \\ 6 \qquad\qquad 6 \end{array}$$

$\therefore m=4$ ， $n=2$

$\Rightarrow(x+5y+\underbrace{4)(x-y+2}_{4\times 2=8})+1=0$

$\Rightarrow\therefore(x+5y+4)(x-y+2)=-1$（ $L_1\cdot L_2=K\neq 0$ ，表雙曲線）

$\therefore$ 雙曲線

(2) $b^2-4ac=4+12>0$

$x^2+2xy-3y^2+2x+10y-3=0$

前三項 $\begin{matrix}1 & & +3\\ & \times & \\ 1 & & -1\end{matrix}$ ：$(x+3y)(x-y)$

$$\Rightarrow \begin{matrix}1 & & +3 & & m\\ & \times & & \times & \\ 1 & & -1 & & n\end{matrix}$$

$$\frac{}{(m+n)x+(3n-m)y}\ :\ (x+3y+m)(x-y+n)$$

$$\underset{2}{\|}\qquad\qquad \underset{10}{\|}$$

$\therefore m=-1\quad n=3$

$\Rightarrow\ (x+3y\underbrace{-1)(x-y+3}_{(-1)\cdot 3=-3})=0$

$\Rightarrow x+3y-1=0$，$x-y+3=0$

$\therefore$兩相交直線

主題5　圓錐曲線的標準化

觀念一　圓錐曲線的標準化

1. 原理：(1) 圓錐曲線標準化的原則：

無心錐線	拋物線 ($\delta=0$)	先旋轉後平移
有心錐線	圓、橢圓、雙曲線 ($\delta<0$)　($\delta>0$)	先平移後旋轉

(2) $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，經軸平移向量$(h，k)$，

將新方程式的x'，y'一次項消去，

則令$\begin{cases}d'=2ah+bk+d=0\\ e'=bh+2ck+e=0\end{cases}$ $\Rightarrow$可解出平移向量$(h，k)$，

即$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，經軸平移向量$(h，k)$，

消去一次項得$a(x')^2+bx'y'+c(y')^2+f'=0$，其中$a$、$b$、$c$不變，$f'=\dfrac{dh}{2}+\dfrac{ek}{2}+f$

※還原工具：$\begin{cases}x=x'+h\\ y=y'+k\end{cases}$

(3) $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，經軸旋轉θ，消去$x'y'$交乘項，得

$a'(x')^2+c'(y')^2+d'x'+e'y'+f'=0$，其中條件$\cot 2\theta=\dfrac{a-c}{b}$（$\theta$必為<u>銳角解</u>）

1° 常數項不變，即$f'=f$

2° 一次項可由矩陣表格計算：（若為0則不必計算）

	d	e
d'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
e'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

3° $a'+c'=a+c$