

綜合上述，由  $4b = a^2 - k^2$  得

$a$	1	2	3	4	5	6				
$k$		0	1	0	2	1	3	0	2	4
$b$		1	2	4	3	6	4	9 ↓ 不合	8 ↓ 不合	5

共有 7 組  $\therefore$  有理根的機率  $\frac{7}{36}$

PS：事實上  $a^2 - 4b$  為完全平方數，可直接討論  $a = 1 \sim 6$  的情形，此處只是利用討論，多瞭解一些性質。

### 主題 4 取球的機率

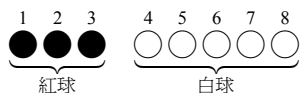
#### [觀念一] 取球的機率

#### [範例一] .....

- (1) 袋中有八個球，其中有三個球是紅球，另外五個球是白球，每次由袋中任取一球，取出後不  
放回，逐次取出，取完為止。請問第一次取到紅球的機率為何？（假設袋中每個球每次被取  
中的機率皆相同）
- (2) 如果將問題改成：逐次取出不放回，求第三次取到紅球機率為何？

**答** (1)  $\frac{3}{8}$  (2)  $\frac{3}{8}$

**解** (1) 我們將八個球編號，其中三個紅球標上 1~3 號，另外五個球標上 4~8 號



第一次取球的結果，以其號碼為樣本，則樣本空間  $\Rightarrow S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

其中事件  $A$  表取出球號為 1, 2, 3 的集合(即紅球)  $\Rightarrow A = \{1, 2, 3\}$

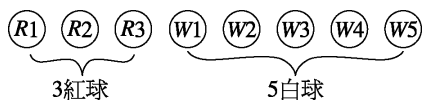
由拉普拉斯機率定義得  $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{8}$

(2) 第三次取到的球，號碼的樣本空間為  $S \Rightarrow S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

每個號碼出現的機會沒有理由會不同，取到紅球的結果形成  $A$

$\Rightarrow A = \{1, 2, 3\}$ ，當然  $P(A) = \frac{3}{8}$

說明：我們可以用排列的觀點來解釋為什麼第三次取到紅球的機率仍為  $\frac{3}{8}$ ，首先將 8 個球編上  
號碼：



逐次取出的球依抽出順序排一列表示一次抽球的過程。

例：W1 R2 R3 W5 W2 R1 W4 W3

$\Rightarrow$  表示第一次取到白球 1 號，第二次取到紅球 2 號……

如此一來  $n(S)$  即所有的排列方式

故  $n(S) = 8!$

而第 3 次抽到紅球的情形即為紅球排到第 3 個的情形，很明顯地

$$n(A) = 3 \cdot 7!$$

紅球有 3 個 剩下 7 個球的排法

$$\text{故 } P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3 \cdot 7!}{8!} = \frac{3}{8}$$

由以上觀察可知：不論第幾次抽到紅球的機率皆為  $\frac{3}{8}$

**【範例二】** .....

- (1) 袋中 20 個玩具，其中有 4 個是不良品。每次取出一個不放回，求第 5 次取到不良品的機率為何？  
 (2) 袋中有 13 個球，其中 5 個是紅球、8 個是白球，每次取出一個不放回，直到取完為止，求白球先被取完的機率？

**答** (1)  $\frac{1}{5}$  (2)  $\frac{5}{13}$

**解** (1) 由前面原理分析知：第 5 次取到不良品的機率與第 1 次取到不良品的機率都是相同的  
 即皆為  $\frac{4}{20} \Rightarrow$  機率  $P = \frac{1}{5}$

(2) 若白球先被取完，則相當於最後一次（即第 13 次）取出的是紅球。（想想為什麼？）

因為最後一次取到紅球的機率與第一次取到紅球的機率是相同的

$$\Rightarrow P = \frac{5}{13}$$

↖ 紅球有 5 個  
↘ 13 個球

**【範例三】** .....

將 A、B、C、…等 9 人平分成三組，求 A、B 在同一組的機率？

**答**  $\frac{1}{4}$

**解** 
$$P = \frac{C_1^3 C_1^7 C_3^6 C_3^3}{C_3^9 C_3^6 C_3^3}$$

$$= \frac{3 \times 7 \times 1}{9 \times 8 \times 7} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 \times 3}$$

說明：此題也可利用取球的方法討論之

$\Rightarrow$  箱中有 3 個紅球，3 個白球，3 個黑球，9 個人依序抽球，抽到同色的即同一組

$\Rightarrow$  故 A、B 同一組的機率即 A、B 抽中同色球之機率

$$\Rightarrow \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

同抽中紅
同抽同白
同抽中黑