綜合上述，由 $4b=a^2-k^2$ 得

a	1	2	3	4		5		6			
k	$\times$	0	1	0	2	1		3	0	2	4
b	$\times$	1	2	4	3	6		4	9 $\downarrow$ 不合	8 $\downarrow$ 不合	5

共有 7 組　$\therefore$ 有理根的機率 $\dfrac{7}{36}$

PS：事實上 a^2-4b 爲完全平方數，可直接討論 $a=1$～6 的情形，此處只是利用討論，多瞭解一些性質。

主題 4　取球的機率

[觀念一] 取球的機率

[範例一]

(1) 袋中有八個球，其中有三個球是紅球，另外五個球是白球，每次由袋中任取一球，取出後不放回，逐次取出，取完爲止。請問第一次取到紅球的機率爲何？（假設袋中每個球每次被取中的機率皆相同）

(2) 如果將問題改成：逐次取出不放回，求第三次取到紅球機率爲何？

答 (1) $\dfrac{3}{8}$　(2) $\dfrac{3}{8}$

解 (1) 我們將八個球編號，其中三個紅球標上 1～3 號，另外五個球標上 4～8 號

$$\underbrace{\overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \overset{3}{\bullet}}_{\text{紅球}}\quad \underbrace{\overset{4}{\circ}\ \overset{5}{\circ}\ \overset{6}{\circ}\ \overset{7}{\circ}\ \overset{8}{\circ}}_{\text{白球}}$$

第一次取球的結果，以其號碼爲樣本，則樣本空間 $\Rightarrow S=\{1，2，3，4，5，6，7，8\}$

其中事件 A 表取出球號爲 1，2，3 的集合(即紅球) $\Rightarrow A=\{1，2，3\}$

由拉普拉斯機率定義得 $P(A)=\dfrac{|A|}{|S|}=\dfrac{3}{8}$

(2) 第三次取到的球，號碼的樣本空間爲 $S \Rightarrow S\{1，2，3，4，5，6，7，8\}$

每個號碼出現的機會沒有理由會不同，取到紅球的結果形成 A

$\Rightarrow A=\{1，2，3\}$，當然 $P(A)=\dfrac{3}{8}$

說明：我們可以用排列的觀點來解釋爲什麼第三次取到紅球的機率仍爲 $\dfrac{3}{8}$，首先將 8 個球編上號碼：

$$\underbrace{R1\ R2\ R3}_{3\text{紅球}}\ \underbrace{W1\ W2\ W3\ W4\ W5}_{5\text{白球}}$$

逐次取出的球依抽出順序排一列表示一次抽球的過程。

例：W1 R2 R3 W5 W2 R1 W4 W3

$\Rightarrow$ 表示第一次取到白球 1 號，第二次取到紅球 2 號……

如此一來 $n(S)$即所有的排列方式

故 $n(S)=8!$

而第 3 次抽到紅球的情形即爲紅球排到第 3 個的情形，很明顯地

$$n(A) = \underbrace{3}_{\text{紅球有 3 個}} \cdot \underbrace{7!}_{\text{剩下 7 個球的排法}}$$

故 $P = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3 \cdot 7!}{8!} = \dfrac{3}{8}$

由以上觀察可知：不論第幾次抽到紅球的機率皆爲 $\dfrac{3}{8}$

[範例二]

(1) 袋中 20 個玩具，其中有 4 個是不良品。每次取出一個不放回，求第 5 次取到不良品的機率爲何？

(2) 袋中有 13 個球，其中 5 個是紅球、8 個是白球，每次取出一個不放回，直到取完爲止，求白球先被取完的機率？

答 (1) $\dfrac{1}{5}$ (2) $\dfrac{5}{13}$

解 (1) 由前面原理分析知：第 5 次取到不良品的機率與第 1 次取到不良品的機率都是相同的

即皆爲 $\dfrac{4}{20} \Rightarrow$ 機率 $P = \dfrac{1}{5}$

(2) 若白球先被取完，則相當於最後一次（即第 13 次）取出的是紅球。（想想爲什麼？）

因爲最後一次取到紅球的機率與第一次取到紅球的機率是相同的

$$\Rightarrow P = \dfrac{\overset{\text{紅球有 5 個}}{5}}{\underset{\text{13 個球}}{13}}$$

[範例三]

將 A、B、C、…等 9 人平分成三組，求 A、B 在同一組的機率？

答 $\dfrac{1}{4}$

解 $P = \dfrac{C_1^3 C_1^7 C_3^6 C_3^3}{C_3^9 C_3^6 C_3^3}$

$= \dfrac{3 \times 7 \times 1}{\dfrac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \times 1} = \dfrac{1}{4}$

說明：此題也可利用取球的方法討論之

⇒箱中有 3 個紅球，3 個白球，3 個黑球，9 個人依序抽球，抽到同色的即同一組

⇒故 A、B 同一組的機率即 A、B 抽中同色球之機率

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}}_{\text{同抽中紅}} + \underbrace{\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}}_{\text{同抽同白}} + \underbrace{\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}}_{\text{同抽中黑}} = \frac{1}{4}$$