[觀念二] 凡得蒙行列式**(Van dermon de determinate)**

1. 原理：(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

（第一列乘 (-1) 加到第二、三行；提 $(c-a)$，提 $(b-a)$）

$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(c-b)(c-a)(b-a)$

[範例一]

求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{vmatrix}$ 之值

答 288

解 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{vmatrix}$（提2、提3、提4）$= 2\cdot 3\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot 3\cdot 4\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}}_{\text{凡得蒙!}}$

$= 2\cdot 3\cdot 4\cdot(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1) = 288$

主題２　行列式的應用

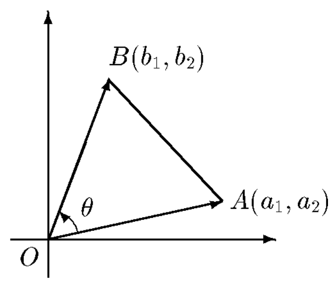
[觀念一] 用行列式表三角形面積

1. 原理：(1) 如圖 ΔAOB，其中 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$，$\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$

ΔAOB 面積 $= \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$

(2) $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$

$\Delta ABC = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$



證明：(1) $\Delta AOB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$ （行列式）（絕對值）

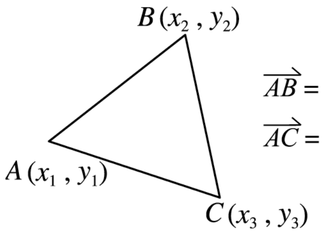
（絕對值）

(2) $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$

$\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right| \xrightarrow{-1} =\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}\right|$ （降階）

$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|$

$=\Delta ABC$



$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$

[範例一]

$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 且 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積為 20，$A(3x_1-4y_1,5y_1-6x_1)$，$B(3x_2-4y_2,5y_2-6x_2)$，$C(3x_3-4y_3,5y_3-6x_3)$，求 ΔABC 面積

答 180

解 ΔABC 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3x_1-4y_1 & 5y_1-6x_1 & 1 \\ 3x_2-4y_2 & 5y_2-6x_2 & 1 \\ 3x_3-4y_3 & 5y_3-6x_3 & 1 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3x_1-4y_1 & -3y_1 & 1 \\ 3x_2-4y_2 & -3y_2 & 1 \\ 3x_3-4y_3 & -3y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$

（×2）消 x　　$\times(-\frac{4}{3})$ 消 y

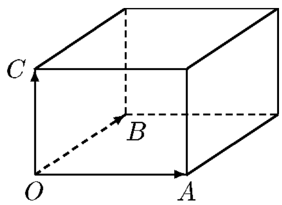
$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3x_1 & -3y_1 & 1 \\ 3x_2 & -3y_2 & 1 \\ 3x_3 & -3y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{9}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$

提 3　提 (−3)

$=9\cdot\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|=9\cdot 20=180$

[觀念二] 體積

1. 公式：(1)如圖以 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$ 為三稜所成的平行六面體



$\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2, a_3)$，

$\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2, b_3)$，

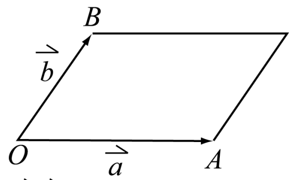
$\overrightarrow{OC}=(c_1, c_2, c_3)$

$\Rightarrow$ 六面體體積為 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 的絕對值

PS：每個面都是平行四邊形的凸多面體稱為平行六面體

公式證明（補充教材）：

1° 空間中，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所成的平行四邊形面積為 S



由 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所形成之平行四邊形

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$

$\Rightarrow S=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$，PS：$S=2\Delta AOB$

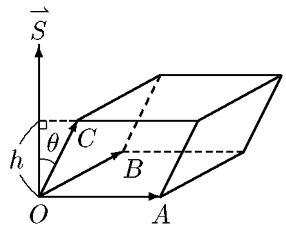
$=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}$

$=\sqrt{(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2)+(a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2-2a_2b_2a_3b_3)+(a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2-2a_1b_1a_3b_3)}$

$=\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2}$

$=\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$

令 $\vec{t}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$



(a) $S=|\vec{t}|$，即平行四邊形，面積為 $\vec{t}$ 的長度。

(b) $\vec{t}$ 是 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的公垂向量

2° 平面六面體體積

$=(\vec{a}, \vec{b}$ 所張平行四邊形面積$)\times h$，令 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}\Rightarrow h=||\vec{c}|\cos\theta|$ ↗絕對值

$=||\vec{t}|\times|\vec{c}|\times\cos\theta|$ ↗絕對值 （$\vec{S}$ 與 $\vec{c}$ 夾角 θ）

$=|\vec{t}\cdot\vec{c}|$

$=\left|(c_1, c_2, c_3)\cdot\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)\right|$

$=\left|c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$

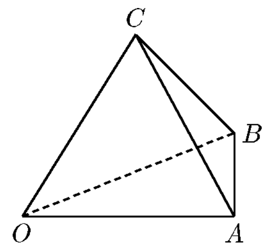
$=|a_2b_3c_1-a_3b_2c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2+a_1b_2c_3-a_2b_1c_3|$

$=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

(2) 四面體 $OABC$，其中 $\overrightarrow{OA}=(a_1\,,a_2\,,a_3)$，$\overrightarrow{OB}=(b_1\,,b_2\,,b_3)$，$\overrightarrow{OC}=(c_1\,,c_2\,,c_3)$

則四面體體積爲 $\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 的絕對值

即 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 所張平行六面體的 $\frac{1}{6}$



說明：1°　三角柱 $OAB-CPQ$ 的體積爲六面體的 $\frac{1}{2}$

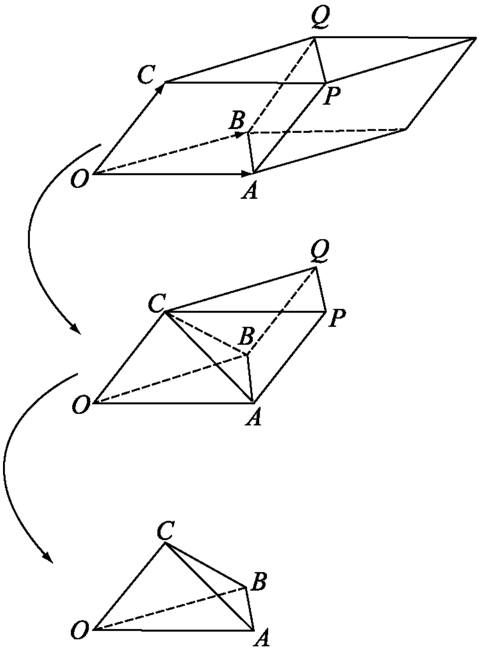
2°　錐體體積 $=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高$=\frac{1}{3}\times$柱體體積

$\Rightarrow$ 四面體 $OABC$ 體積

$=\frac{1}{3}\times(OAB-CPQ$ 體積$)$

$=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times$六面體體積$)$

$=\frac{1}{6}\times($六面體體積$)$



[範例一]

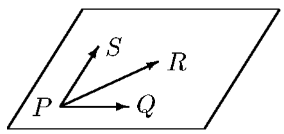
$P(1\,,0\,,1)$，$Q(1\,,1\,,k-2)$，$R(2\,,0\,,0)$，$S(k+2\,,0\,,-3)$四點共面，求 k

答　3

解　$\overrightarrow{PQ}=(0\,,1\,,k-3)$，$\overrightarrow{PR}=(1\,,0\,,-1)$，$\overrightarrow{PS}=(k+1\,,0\,,-4)$

$\because$ 3 個向量共面，$\therefore$ 六面體體積爲 0

$$\therefore\begin{vmatrix} 0 & 1 & k-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k+1 & 0 & -4 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow -(k+1)+4=0$$
$$\Rightarrow k=3$$



主題 3　三元一次方程組

[觀念一]　克拉瑪法則(Cramer's rule)

1. 原理：$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的 x、y、z 滿足 $\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \\ \Delta\cdot z=\Delta_z \end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$