名師學院升大系列數學科_102 學測命中率比對

一、整體試題分析

毫無疑問，今年數學學測可說是近五年來最難的一次，若說是歷屆試題最難的一次大概也不為過。不但基本題少，許多看似簡單的題目也一點都不能夠輕易得分，尤其是多選題，更是招招俐落，令人不易回答！一如往昔，學測題型一向不易命中，但寰宇名師學院的教材收錄許多大考重要題型，如單選 3 和 5 與本教材中綜合練習的命題方式十分雷同。

此外，今年首度依照 99 課綱命題，99 課綱比過去課綱加深了統計課程，而今年的統計試題難度果然更勝以往，不能僅僅透過觀念解題，還需要配合對公式的嫻熟與掌握能力才能順利作答！以單選第 4 題為例，須熟諳標準差的定義與迴歸直線斜率的公式，並經過計算無誤後，才能正確作答！不過幸好名師學院的教材都已經將這些重要定義與公式清楚地整理出來，細心的學員要解出此題應該不難！

還有些觀念較深且不易理解並富有高鑑別度的題型（如：選填 H），是屬於跨章節以及用到更多觀念的題目，雖說不符合學測的命題原則，但每一個所需具備的觀念，除了在講義上，在影片解說中老師也念茲在茲地強調，有熟讀教材的學員應該都能追分成功！而在本次考題中，儘管基本題型較少，但如多選題 8 與選填題 C，只要能好好依照影片中老師講解學習，要掌握這類基本題型並非難事！

綜合以上可知，儘管本次學測命題較難，但在名師學院升大系列課程中，其實早已深入淺出地收錄編撰了破題所須的重要觀念，只要平時有反覆觀看，並能注意老師耳提面命的重點觀念，必能提升自我解題力並得到超越均標以上的成績。

其餘精采的比對結果，請參考以下列表，有更完整的內容呈現！

二、試題比對

1.	**102 學測** 單選第 **3** 題	3. 袋子裡有 3 顆白球， 2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？ (1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{5}{12}$　(3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{5}$　(5) $\frac{2}{3}$
	名師學院 升大系列 高中一年級 數學（下） 講義第 **144,146** 頁	高中一年級數學（下） 第三章 綜合練習 非選擇題 第 3 題 3. 袋中有白球 5 顆，黑球 8 顆，自袋中連續取三球，每次取後皆不放回，求在已知第一球取得白球之條件下，第三球取得黑球之機率爲 ＿＿＿＿＿。 ★★ 3. $\frac{2}{3}$ 解：所求 $=P$(第三球爲黑球 ｜ 第一球爲白球) $=\dfrac{P(\text{第三球爲黑球} \cap \text{第一球爲白球})}{P(\text{第一球爲白球})}=\dfrac{\overbrace{\frac{5}{13}\times\frac{4}{12}\times\frac{8}{11}}^{\text{白}_1\text{、白}_2\text{、黑}_3}+\overbrace{\frac{5}{13}\times\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}}^{\text{白}_1\text{、黑}_2\text{、黑}_3}}{\frac{5}{13}}=\frac{2}{3}$
2.	**102 學測** 單選第 **5** 題	5. 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。 (1) 55 (2) 66 (3) 132 (4) 198 (5) 253
	名師學院 升大系列 高中一年級 數學（下） 講義第 **81~82** 頁	高中一年級數學（下） 第二章 第2節 主題6 觀念二 重複組合 範例一 **範例一** (1) 將 10 個相同的蘋果分給甲、乙、丙 3 人，使甲至少分得 1 個，乙至少分得 2 個，丙至少分得 3 個的分配法有幾種？ (2) 將 10 個相同的蘋果分給 3 個人，使其中一人至少分得 1 個，一人至少分得 2 個，一人至少分得 3 個的分配法有幾種？ (3) 將 4 個相同的梨子、5 個相同的蘋果任意分給 3 個人，則共有幾種分配法？

答 (1) H_4^3種　(2) H_7^3-3種　(3) $H_4^3H_5^3$種

解 (1) 1° 設甲得 x_1 個，乙得 x_2 個，丙得 x_3 個

則 $x_1+x_2+x_3=10\cdots\cdots$(A)，其中 $\underbrace{x_1\ge 1}_{\text{甲至少1個}}$，$\underbrace{x_2\ge 2}_{\text{乙至少2個}}$，$\underbrace{x_3\ge 3}_{\text{丙至少3個}}$

2° 令 $x_1=a+1$，$x_2=b+2$，$x_3=c+3$，其中 a、b、$c\ge 0$

代入(A)得 $(a+1)+(b+2)+(c+3)=10$

$\Rightarrow a+b+c=4$，其非負整數解有 H_4^3 組

$\therefore$分配法有 H_4^3 種

(2) 可先分給 3 個人各 1 個蘋果，再將剩下的 7 個蘋果任意分給 3 人

$\Rightarrow a+b+c=7$，其非負整數解有 H_7^3 組

但若剩下的 7 個蘋果全部給 1 人：(7, 0, 0)、(0, 7, 0)、(0, 0, 7)

3 人分別分得 8 個, 1 個, 1 個　3 人分別分得 1 個, 8 個, 1 個　3 人分別分得 1 個, 1 個, 8 個

則不合題意，故要扣除

$\therefore$分配法有 $H_7^3-\underset{\text{3 種不合}}{3}$ 種

(3) 1° 先分梨子

4 個相同的梨子任意分給 3 個人，設 3 個人分別分得 a、b、c 個

$\Rightarrow a+b+c=4$，其非負整數解有 H_4^3 組

$\Rightarrow$梨子有 H_4^3 種分法

2° 再分蘋果

5 個相同的蘋果任意分給 3 個人，設 3 個人分別分得 x、y、z 個

$\Rightarrow x+y+z=5$，其非負整數解有 H_5^3 組

$\Rightarrow$蘋果有 H_5^3 種分法

$\therefore$共有 $H_4^3H_5^3$ 種分法

3.

102 學測
單選第 4 題

4. 已知以下各選項資料的迴歸直線(最適合直線)皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。

(1)

x	2	3	5
y	1	13	1

(2)

x	2	3	5
y	3	10	2

(3)

x	2	3	5
y	5	7	3

(4)

x	2	3	5
y	9	1	5

(5)

x	2	3	5
y	7	4	4

名師學院
升大系列

高中一年級
數學（下）
講義第
155,170 頁

高中一年級數學（下）
第四章 第1節 主題2 觀念二 標準差
第四章 第2節 主題2 觀念二 迴歸直線公式

觀念二　標準差

【原理】要表達一組資料的分散程度，可利用每個資料與中心點的距離和之大小來判斷，即 $\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{X}|$，但因資料的多寡會影響其值的大小，易失其參考價值，故再除以資料的個數，即 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{X}|}{n}$ 來表示資料的離散程度，稱爲平均絕對離差(MAD)。

【定義】1. 由於絕對值在代數運算中不易討論，所以將絕對離差平方的平均，即 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n}$，稱爲變異數 S^2（或 σ^2）。但變異數的單位是資料單位的平方，必須加以開方後，才能與其他資料（如平均數…等）做運算（或比較），因此以變異數的開方，即 $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n}}$ 來表示資料的分散程度，稱爲標準差 S。

觀念二　迴歸直線公式

【公式】平面上 n 個點 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、⋯、$P_n(x_n, y_n)$，變數 Y 對 X 的迴歸直線為 $y = ax + b$

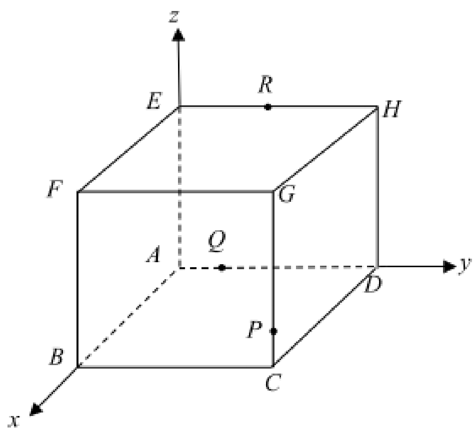
$$\Rightarrow a、b \text{ 滿足方程組} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = (\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b \end{cases}$$

【補充】將上面方程組解聯立可得迴歸直線的斜率 $a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$，

經計算後可得 $a = r \cdot \dfrac{S_y}{S_x}$。

4. **102 學測** **選填 H**

H. 如下圖，在坐標空間中，A,B,C,D,E,F,G,H 為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標 $A(0,0,0)$、$B(6,0,0)$、$D(0,6,0)$ 及 $E(0,0,6)$，P 在線段 $\overline{CG}$ 上且 $\overline{CP}:\overline{PG} = 1:5$，$R$ 在線段 $\overline{EH}$ 上且 $\overline{ER}:\overline{RH} = 1:1$，$Q$ 在線段 $\overline{AD}$ 上。若空間中通過 P,Q,R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，則 Q 點的 y 坐標為 $\dfrac{㉜㉝}{㉞㉟}$。(化成最簡分數)



名師學院
升大系列

高中二年級
數學（下）
講義第 30,66 頁

高中二年級數學（下）
第一章 第4節 主題1 觀念一 公垂向量
第二章 第2節 主題2 觀念一 直線與平面的幾何關係

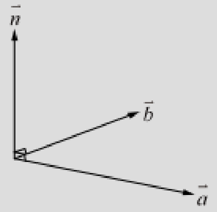
觀念一　公垂向量

【運算法則】$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$稱為二階行列式，計算方法為$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$。

例：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times5-2\times(-3)=11$

【定義】已知空間中二向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，若$\vec{n}\perp\vec{a}$且$\vec{n}\perp\vec{b}$，
則$\vec{n}$稱為$\vec{a}$、$\vec{b}$的公垂向量。

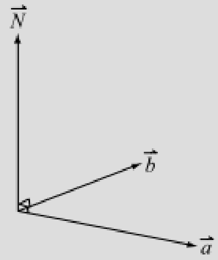
【注意】1. 空間中才有公垂向量的存在，在平面上則無。
2. $\vec{a}$與$\vec{b}$的公垂向量有無限多個。



【公式】設$\begin{cases} \vec{a}=(a_1,a_2,a_3) \\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3) \end{cases}$為空間中兩個不平行的已知向量

$\Rightarrow \vec{N}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$為$\vec{a}$與$\vec{b}$的一個公垂向量，

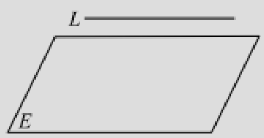
而$\vec{N}$稱為$\vec{a}$、$\vec{b}$的外積



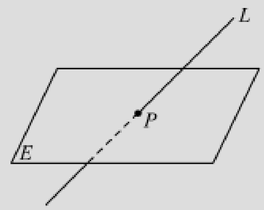
【證明】1° 設$\vec{a}$、$\vec{b}$的公垂向量為$\vec{N}=(x,y,z)$
已知$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$
$\because \vec{N}\perp\vec{a}$　$\therefore \vec{N}\cdot\vec{a}=0 \Rightarrow a_1x+a_2y+a_3z=0$

觀念一　直線與平面的幾何關係

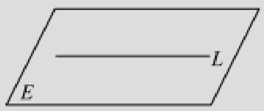
【原理】1. 空間中一直線與平面的關係：
(1) 直線L與平面E平行（沒有交點）。



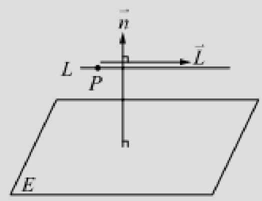
(2) 直線L與平面E交於一點（一個交點）。



(3) 直線L與平面E重合（無限多個交點）。



2. 設直線L的方向向量為$\vec{L}$，平面E的法向量為$\vec{n}$：
(1) 若$\vec{n}\cdot\vec{L}=0$，即$\vec{n}\perp\vec{L}$，則L與E平行或重合。
① 在L上任取一點P，若點P不在平面E上
$\Rightarrow L$與E平行$(L // E)$



<table>
<tr>
<td rowspan="2">5.</td>
<td>102 學測
多選第 8 題</td>
<td>8. 設 $a>1>b>0$，關於下列不等式，請選出正確的選項。
(1) $(-a)^7>(-a)^9$
(2) $b^{-9}>b^{-7}$
(3) $\log_{10}\frac{1}{a}>\log_{10}\frac{1}{b}$
(4) $\log_a 1>\log_b 1$
(5) $\log_a b \ge \log_b a$</td>
</tr>
<tr>
<td>名師學院
升大系列

高中一年級
數學（上）
講義第
146,148,162
頁</td>
<td>高中一年級數學（上）
第三章 第2節 主題4 觀念一 遞增性與遞減性的應用
第三章 第3節 主題1 觀念二 對數的運算性質
第三章 第4節 主題3 觀念二 底數未知時須討論

觀念一　遞增性與遞減性的應用
【原理】1. $a>1$，a^x 遞增：$x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$
相同
例：(1) $\frac{1}{3}>\frac{1}{7}\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{7}}$
(2) $-0.8>-1.2\Rightarrow 2^{-0.8}>2^{-1.2}$
(3) $3^p>3^q\Rightarrow p>q$
2. $0<a<1$，a^x 遞減：$x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$
相反
例：(1) $\frac{1}{3}>\frac{1}{7}\Rightarrow (0.1)^{\frac{1}{3}}<(0.1)^{\frac{1}{7}}$
(2) $-0.8>-1.2\Rightarrow (0.1)^{-0.8}<(0.1)^{-1.2}$
(3) $(0.01)^x>(0.01)^y\Rightarrow x<y$</td>
</tr>
</table>

觀念二　對數的性質

【性質 1】$\log_a m+\log_a n=\log_a mn$　（對數相加，真數相乘）

說明 令 $\log_a m=p$，$\log_a n=q$

$\Rightarrow a^p=m$，$a^q=n\Rightarrow a^p\cdot a^q=a^{p+q}=mn$

$\because a^{p+q}=mn\Rightarrow p+q=\log_a mn\Rightarrow \underbrace{\log_a m}_{p}+\underbrace{\log_a n}_{q}=\log_a mn$

例：$\log_2 8+\log_2 4=\log_2(8\times 4)=\log_2 32=5$

【性質 2】$\log_a m-\log_a n=\log_a \dfrac{m}{n}$　（對數相減，真數相除）

說明 令 $\log_a m=p$，$\log_a n=q$

$\Rightarrow a^p=m$，$a^q=n\Rightarrow a^{p-q}=\dfrac{a^p}{a^q}=\dfrac{m}{n}$

$\Rightarrow a^{p-q}=\dfrac{m}{n}\Rightarrow p-q=\log_a\dfrac{m}{n}\Rightarrow \log_a m-\log_a n=\log_a\dfrac{m}{n}$

例：$\log_3 81-\log_3 9=\log_3\dfrac{81}{9}=\log_3 9=2$

【性質 3】$\log_a b^t=t\log_a b$　（真數的次方，可提出作係數）

說明 令 $\log_a b=s\Rightarrow a^s=b\Rightarrow b^t=a^{ts}$　（次方同乘一數 t）

$\Rightarrow \log_a b^t=ts\Rightarrow \log_a b^t=t\underbrace{\log_a b}_{s}$

例：$\log_4 8=\log_4 64^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_4 64=\dfrac{1}{2}\cdot 3=\dfrac{3}{2}$

【性質 4】$\log_{a^t} b^s=\dfrac{s}{t}\log_a b$　（次方：真數放分子，底數放分母）

說明 令 $\log_a b=r\Rightarrow a^r=b\xRightarrow{\text{次方乘}s} b^s=a^{rs}=(a^t)^{\frac{rs}{t}}$

$\because b^s=(a^t)^{\frac{rs}{t}}\Rightarrow \log_{a^t} b^s=\dfrac{rs}{t}=\dfrac{s}{t}\cdot r=\dfrac{s}{t}\log_a b$

例：$\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\dfrac{3}{2}\log_2 2=\dfrac{3}{2}$

【延伸】$\log_a b=\log_{a^t} b^t=\log_{\sqrt[n]{a}}\sqrt[n]{b}$

【性質 5】$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$　（倒數公式）

說明 令 $\log_a b=x\Rightarrow a^x=b\Rightarrow a=b^{\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \log_b a=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_a b}$

例：$\log_8 2=\dfrac{1}{\log_2 8}=\dfrac{1}{3}$

觀念二　底數未知時須討論

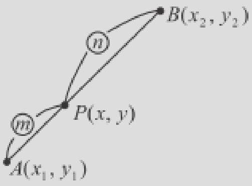
【原理】若 $\log_a x>\log_a y$，千萬不可直接認爲 $x>y$，須分以下情形討論：

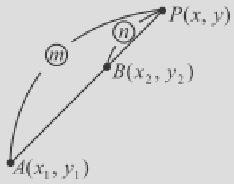
1. $a>1$（遞增）。
2. $0<a<1$（遞減）。

<table>
<tr>
<td rowspan="2">6.</td>
<td>102 學測
選填 C</td>
<td>C. 坐標平面中 $A(a,3)$, $B(16,b)$, $C(19,12)$ 三點共線。已知 C 不在 A,B 之間，且 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$，則 $a+b=$ ⑲⑳ 。</td>
</tr>
<tr>
<td>名師學院
升大系列

高中二年級
數學（上）
講義第 197
頁</td>
<td>高中二年級數學（上）
講座二 第1節 主題1 觀念一 分點公式

觀念一　分點公式

【公式】1. 內分點公式：
平面上三點 $A(x_1,y_1)$，$P(x,y)$，$B(x_2,y_2)$，已知 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 P 的坐標 (x,y) 可表爲 $(x,y)=(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n})$


2. 外分點公式：
若 P 在 $\overline{AB}$ 之外，$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 $(x,y)=(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\frac{my_2-ny_1}{m-n})$

</td>
</tr>
</table>