名師學院升大系列數學科（甲）_104 指考命中率比對

一、整體試題分析

今年數學（甲）指考題目較去年靈活，難度也比去年高一些，但命題方向仍舊強調基本觀念的運用。大多數的考題皆屬觀念題，除了邏輯思考外，還需要理解題意及細心的計算。從題型來看，有近三分之二的考題需利用向量、多項式、幾何觀念來解題，且試題偏重分析與觀念的運用，因此若以往年考古題的考試觀念做為準備方向的同學，或是只背公式的同學恐難以獲得理想的成績。

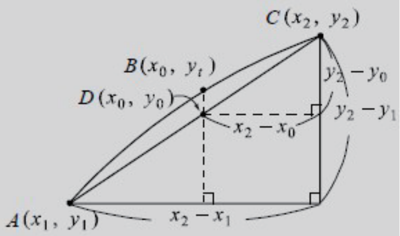
儘管如此，只要學習不走偏門，詳讀名師學院升大系列的課程，只需關切是否已經學到每個數學觀念背後的數學精神，不論考題方向如何改變，觀念的意義是不會變的，唯有讓自己的觀念基礎穩固，才是大考致勝的關鍵！以單選第 1 題為例，主要測試同學對 $\log f(x)$與 $f(x)$的互換技巧及內插法的觀念，這題是屬於基本觀念題，在名師學院升大系列的課程中早已將解題觀念表明，就等同學依樣畫葫蘆，解出 x 範圍後，即可找出 x 的整數解有幾個，便輕鬆得分，這題其實不難，同學應該清楚掌握基本觀念才是最重要的。而選填第 A 題，同學只要記得名師學院教材中所編錄的微積分定理，以及多選第 8 題，只要利用二項分配的觀念，且細心閱讀並理解題意，亦能輕鬆得分。

還有許多試題考的是綜合觀念，但只要詳讀名師學院升大系列的課程，徹底了解各個數學觀念，即可奪得高分！以多選第 6 題為例，只要利用微積分求極值、多項式圖形判別的觀念，分數輕鬆入袋；而選填第 C 題，只需利用期望值的定義，並搭配分式極限的基本運算性質即可算出答案。至於非選第二題，以數學歸納法與遞迴關係式、無窮等比級數的基本定義與公式即可正確答題，名師學院教材也早已將所需的觀念詳列並彙整。因此，只要同學熟讀名師學院升大系列課程，無論大考題如何變化，必定都難不倒你才是！

由以上考題的分析可知，名師學院升大系列課程一向強調紮實的基本觀念與靈活運用觀念的學習方向，與指考命題方向一致幾乎是不辯自明。因此，只要同學能夠按部就班地使用名師學院的教材，要考取高分絕對沒問題！

精采的比對結果，請參考以下列表，有更完整的內容呈現哦！

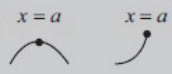
二、試題比對

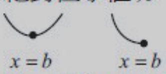
1.	**104 指考** 單選第 1 題	1. 滿足不等式 $\frac{1}{104}\le\left(\sqrt{10}\right)^{x}\le 2015$ 的整數 x 共有多少個？ (1) 9 個 (2) 10 個 (3) 11 個 (4) 12 個 (5) 13 個
	名師學院 升大系列 高中一年級 數學（上） 講義第 165 頁 高中一年級 數學（上） 講義第 169 頁	高中一年級數學（上） 第三章　第 4 節　主題 3　觀念四　**log*f*(*x*)與 *f*(*x*)的互換技巧** **觀念四　log *f*(*x*)與 *f*(*x*)的互換技巧** 【原理】先求 $f(x)$ 的範圍，再取對數，求出 $\log f(x)$ 的範圍。 例：1. $10\le f(x)\le 1000\Rightarrow 1\le \log f(x)\le 3$ 2. $\frac{1}{3}\le f(x)\le 9\Rightarrow (\frac{1}{3})^{1}\le f(x)\le(\frac{1}{3})^{-2}\Rightarrow -2\le\log_{\frac{1}{3}} f(x)\le 1$ 高中一年級數學（上） 第三章　第 5 節　主題 1　觀念三　內插法 **觀念三　內插法** 【原理】已知一函數上有三點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_0, y_t)$、$C(x_2, y_2)$，當 $[x_1, x_2]$（即 x_1 至 x_2 的區間）很小時，則兩點間的直線函數圖形會趨近於真實函數圖形（$(x_0, y_0)\approx(x_0, y_t)$），故可利用 $\frac{y_2-y_0}{y_2-y_1}=\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}$，求算出 (x_0, y_0)，並且可用 y_0 做爲 y_t 之近似值。此種求近似值方法，我們稱之爲內插法。 

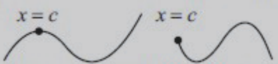
<table>
<tr>
<td rowspan="2">2.</td>
<td>104 指考
多選第 6 題</td>
<td>6. 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，$g(x)$ 為實係數三次多項式。已知 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$ 與 $x=0$，而 $y=g(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4, x=0$ 及 $x=4$，且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的（相對）極小值皆發生於 $-4<x<0$。請選出正確的選項。
(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高次項係數皆為正
(2) $f(x)$ 的（相對）極小值發生於 $x=-2$
(3) $g(x)$ 的（相對）極小值發生於 $x=-2$
(4) $g(-1)=g(-3)$
(5) $g(-1)=-g(1)$</td>
</tr>
<tr>
<td>名師學院
升大系列

高中三年級
數學（下）
講義第 95、96、97 頁</td>
<td>高中三年級數學（下）
第二章　第 2 節　主題 2　觀念一　極值

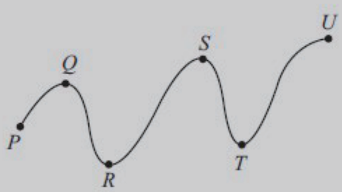
觀念一　極值

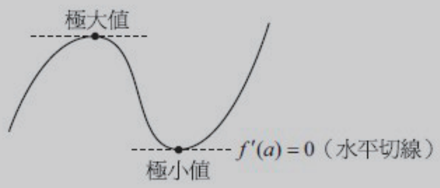
【定義】設 $f(x)$ 爲一個函數，a、b、c、d 都在 $f(x)$ 的定義域 A 中
1. 最大值：$\forall x\in A$，$f(a)\ge f(x)$，則 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的最大值，即 $f(x)$ 在 $x=a$ 有最大值（絕對極大值）。
例：


2. 最小值：$\forall x\in A$，$f(x)\ge f(b)$，則 $f(b)$ 是 $f(x)$ 的最小值，即 $f(x)$ 在 $x=b$ 有最小值（絕對極小值）。
例：


3. 極大值：所有在 c 附近的 x，皆滿足 $f(c)\ge f(x)$，則 $f(c)$ 是 $f(x)$ 的極大值，即 $f(x)$ 在 $x=c$ 有極大值（相對極大值）。
例：


4. 極小值：所有在 d 附近的 x，皆滿足 $f(x)\ge f(d)$，則 $f(d)$ 是 $f(x)$ 的極小值，即 $f(x)$ 在 $x=d$ 有極小值（相對極小值）。
例：

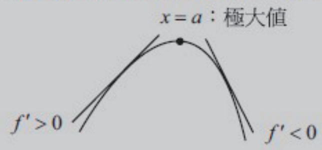

【例說】試判別右圖中各點的極值。
最大值：U　　最小值：R
極大值：Q、S、U　　極小值：P、R、T


【整理】1. 絕對極值至多一個最大（小）值，相對極值個數則不一定。
2. 絕對極值必是相對極值。
3. 極大值可能小於極小值。
【原理】實數函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，若 $f(x)$ 在 $x=a$ 有極大或極小值，則 $f'(a)=0$。此即爲費馬定理。

</td>
</tr>
</table>

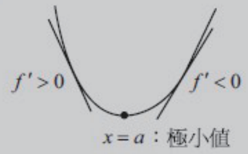
【結論】1. 極值的判定：

若實數函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，且 $f'(a)=0$，則：

(1) 在 $x=a$ 前後，若 $f'(x)$ 由正變負 $(f'(a^-)>0,\ f'(a^+)<0)$，則 $f(a)$ 爲極大值。



(2) 在 $x=a$ 前後，若 $f'(x)$ 由負變正 $(f'(a^-)<0,\ f'(a^+)>0)$，則 $f(a)$ 爲極小值。此即爲費馬定理。



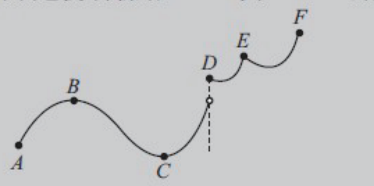
2. 極值的發生：

對於函數 $f(x)$ 而言，極大、極小值可能出現在下列情況：

(1) 滿足 $f'(a)=0$ 的點，且在 $x=a$ 前後，$f'(x)$ 正負異號。　例：B、C 點

(2) $f(x)$ 不可微分。　例：D、E 點

(3) $f(x)$ 定義域端點。　例：A、F 點



高中一年級
數學（上）
講義第 62 頁

高中一年級數學（上）
第二章　第 **1** 節　主題 **6**　觀念一　奇偶性

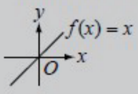
觀念一　奇偶性

【定義】1. 若 $f(-x)=-f(x)$，則稱 $f(x)$ 為奇函數。　例：$f(x)=x$、$f(x)=x^3$

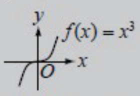
2. 若 $f(-x)=f(x)$，則稱 $f(x)$ 為偶函數。　例：$f(x)=x^2$、$f(x)=|x|$

【性質】1. $f(x)$ 為奇函數⇔圖形對稱於原點。

例：1. $f(x)=x$

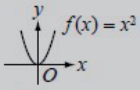


2. $f(x)=x^3$

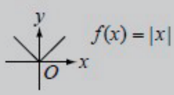


2. $f(x)$ 為偶函數⇔圖形對稱於 y 軸。

例：1. $f(x)=x^2$



2. $f(x)=|x|$



3. 奇·奇＝偶，奇·偶＝奇，偶·偶＝偶，奇÷奇＝偶，奇÷偶＝奇，偶÷偶＝偶，奇±奇＝奇，偶±偶＝偶。

例：$f(x)=x$，$g(x)=x^3$ 為奇函數，而 $h(x)=x^2$，$k(x)=x^4$ 為偶函數

$\Rightarrow f(x)\cdot g(x)$ 為偶函數，$f(x)\cdot k(x)$ 為奇函數，$h(x)-k(x)$ 為偶函數，

$h(x)\cdot k(x)$ 為偶函數，$g(x)\div h(x)$ 為奇函數⋯

<table>
<tr><td></td><td></td><td>4. 奇±偶、偶±奇的結果既非奇函數，也不是偶函數。
例：$f(x)=x+x^2$，則$f(-x)\neq -f(x)$且$f(-x)\neq f(x)$，所以$f(x)$非奇函數，也非偶函數</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td>104 指考
多選第 8 題</td><td>8. 被診斷為不孕症的患者，可分為兩類：第一類為可藉人工方式受孕；其餘患者為第二類，無法藉由人工方式受孕。第一類在不孕症的患者中所佔比例為 p（$0<p<1$），而每做一次人工受孕成功的機率為 q（$0<q<1$），且每次成功與否互相獨立。不孕症的患者除非人工受孕成功，否則無法得知是屬於哪一類的患者。請選出正確的選項。
(1) 不孕症的患者，第一次人工受孕失敗的機率為 $(1-p)(1-q)$
(2) 在人工受孕失敗一次的情況下，屬於第二類不孕症患者的條件機率為 $\frac{1-p}{1-pq}$
(3) 若醫學進步，讓人工受孕成功的機率 q 提高了，則在人工受孕失敗一次的情況下，屬於第二類不孕症患者的條件機率會降低
(4) 在第一類的患者中，做一次人工受孕就成功的機率大於做兩次才成功的機率
(5) 若醫學進步，讓人工受孕成功的機率 q 提高了，則在第一類的患者中，做一次人工受孕就成功的機率會增加，而做兩次才成功的機率會降低</td></tr>
<tr><td>名師學院
升大系列

高中三年級
數學（上）
講義第 17 頁</td><td>高中三年級數學（上）
第一章　第 2 節　主題 2　觀念一　二項分配（二項分布）
【原理】若進行某種試驗時，每次試驗都具有以下三種特性：
1. 每次試驗只有成功與失敗兩種結果。
2. 成功的機率為P，失敗的機率為$1-P$。
3. 每次的試驗都不受前次試驗的影響，也不會影響下一次的試驗。
則試驗n次，恰有k次成功的機率為$C_k^n P^k(1-P)^{n-k}$，$k=0, 1, 2, \cdots, n$。
例：實驗 3 次，恰成功 2 次
成．成．敗 $\Rightarrow$ $P\cdot P\cdot(1-P)=P^2(1-P)$
成．敗．成 $\Rightarrow$ $P\cdot(1-P)\cdot P=P^2(1-P)$
敗．成．成 $\Rightarrow$ $(1-P)\cdot P\cdot P=P^2(1-P)$
故機率為$C_2^3P^2(1-P)$</td></tr>
</table>

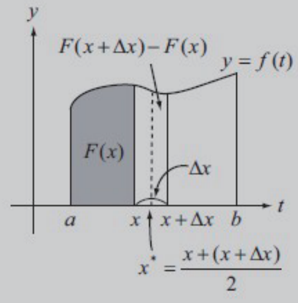
<table>
<tr>
<td rowspan="2">**4.**</td>
<td>**104 指考**
選填第 **A** 題</td>
<td>A. 設 a,b 為實數，$f(x)$ 為 5 次實係數多項式且其最高次項係數為 a。
若 $f(x)$ 滿足 $\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\left(x^2+4x+5\right)^3-\frac{3}{2}$，則 $a=$ ⑨，$b=$ ⑩⑪。</td>
</tr>
<tr>
<td>名師學院
升大系列

高中三年級
數學（下）
講義第 **124** 頁</td>
<td>高中三年級數學（下）
第二章　第 **3** 節　主題 **3**　觀念一　微積分定理

觀念一　微積分定理

【原理 1】微積分第一定理：$\frac{d[\int_a^x f(t)dt]}{dx}=f(x)$

【證明 1】令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$



$\Rightarrow \frac{d\int_a^x f(t)dt}{dx}=F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot f(x^*)}{\Delta x}$　（其中 $x^*=\frac{x+(x+\Delta x)}{2}$）
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x^*)=f(x)$

【原理 2】微積分第二定理：$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$
其中 $G'(x)=f(x)\Rightarrow G(x)+K=F(x)$

【證明 2】$\because G'(x)=f(x)$　$\therefore \int_a^x f(t)dt=G(x)+K$
令 $x=a$ 代入可得 $G(a)+K=\int_a^a f(t)dt=0\Rightarrow K=-G(a)$
$\int_a^x f(t)dt=G(x)-G(a)$</td>
</tr>
</table>

5.

104 指考
選填第 C 題

C. 一盒子裡有 n （$n>3$） 顆大小相同的球，其中有 1 顆紅球、2 顆藍球以及 $n-3$ 顆白球。從盒子裡隨機同時抽取 3 球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為 $2n$ 分、n 分及 1 分。若所得分數的期望值為 E_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n =$ ⑯⑰ 。

名師學院
升大系列

高中三年級
數學（上）
講義第 20 頁

高中三年級數學（上）
第一章　第 2 節　主題 2　觀念二　二項分配的期望值

觀念二　二項分配的期望值

【例說】某一試驗的成功機率為 p，若試驗 n 次，試求成功次數的期望值。

【解析】（法一）

令 x 表示成功的次數，$f(x)$ 表示對應的機率函數

$\Rightarrow f(k)=C_k^n p^k q^{n-k}$，其中 $q=1-p$

x	1	2	3	⋯	n
$f(x)$	$C_1^n pq^{n-1}$	$C_2^n p^2q^{n-2}$	$C_3^n p^3q^{n-3}$	⋯	$C_n^n p^n$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E(x)&=1\cdot C_1^n pq^{n-1}+2\cdot C_2^n p^2q^{n-2}+3\cdot C_3^n p^3q^{n-3}+\cdots+nC_n^n p^n\\&=npq^{n-1}+2\cdot\frac{n!}{(n-2)!2!}p^2q^{n-2}+3\cdot\frac{n!}{(n-3)!3!}p^3q^{n-3}+\cdots+np^n\\&=np[q^{n-1}+\frac{(n-1)!}{(n-2)!1!}pq^{n-2}+\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}p^2q^{n-3}+\cdots+p^{n-1}]\\&=np(C_0^{n-1}q^{n-1}+C_1^{n-1}pq^{n-2}+C_2^{n-1}p^2q^{n-3}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}p^{n-1})\\&=np(q+p)^{n-1}=np\quad(\because q+p=1)\end{aligned}$$

（法二）

想像有 n 個獎牌，每次試驗成功時可得一個獎牌，因為試驗的成功率為 p，因此能得到第一個獎牌的機率為 p，能得到第二個獎牌的機率亦為 p，則試驗 n 次可能得到獎牌的數目（即成功次數）為 $\underbrace{1\cdot p+1\cdot p+\cdots+1\cdot p}_{n\text{項}}=np$（期望值的疊加性）

獎牌數	1	1	1	⋯	1
	↓	↓	↓		↓
機率	p	p	p		p

$\Rightarrow E(\text{個數})=1\cdot p+1\cdot p+\cdots+1\cdot p=np$

高中三年級
數學（下）
講義第 7 頁

高中三年級數學（下）
第一章　第 1 節　主題 2　觀念三　基本收斂數列

觀念三　基本收斂數列

【定義】1. 常數數列：若 $a_n=c$，c 爲常數，即 $\{a_n\}=\{c,c,c,c,\cdots\}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$。

2. 分式數列：若 $a_n=\dfrac{f(n)}{g(n)}$，其中 $f(n)$、$g(n)$ 均爲多項式，則：

(1) 當 $\deg f(n)<\deg g(n)$ 時，數列收斂於 0。

(2) 當 $\deg f(n)=\deg g(n)$ 時，數列收斂於領導係數比（分子與分母最高次方項的係數比）。

(3) 當 $\deg f(n)>\deg g(n)$ 時，數列發散。

例：試判定下列數列的收斂與發散。

(1) $a_n=\dfrac{3n^2+2n}{0.1n^3+1}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{0.1+\frac{1}{n^3}}=0\quad（收斂）$$

(2) $a_n = \dfrac{100n^2+5000}{2n^2-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100+\dfrac{5000}{n^2}}{2-\dfrac{1}{n^2}} = 50$　（收斂）

(3) $a_n = \dfrac{0.001n^4}{100n^3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0.001}{\dfrac{100}{n}} = \dfrac{0.001}{0}$　（發散）

3. 等比數列的極限：$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \text{不存在} & ,\text{當} |r|>1 \text{或} r=-1 \quad \text{（發散）} \\ 1 & ,\text{當} r=1 \quad \text{（收斂）} \\ 0 & ,\text{當} |r|<1 \quad \text{（收斂）} \end{cases}$

例：試判定下列數列的收斂與發散。

(1) $\{(-\frac{1}{2})^n\}$

$\Rightarrow |-\frac{1}{2}|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^n = 0$　（收斂）

(2) $\{(\frac{100}{99})^n\}$

$\Rightarrow |\frac{100}{99}|>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{100}{99})^n$ 不存在　（發散）

6.

104 指考
非選第 **2** 題

二. 設無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 符合 $a_0 = 0$ 且當 $n \ge 1$ 時，a_n 滿足

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{當}n\text{ 為偶數，} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{當}n\text{ 為奇數。} \end{cases}$$

(1) 將 a_6 寫成兩個等比級數的差，其中一個有6項，另一個有3項。（2分）

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$ 的值。（3分）

(3) 證明：當 $n \ge 0$ 時 $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$。並依此說明對於所有正整數 n，不等式 $-\frac{1}{8} \le a_{2n} < 0$ 恆成立。（8 分）

名師學院
升大系列

高中二年級
數學（下）
講義第 **19** 頁

高中一年級數學（下）
第一章　第 **1** 節　主題 **5**　觀念三　數學歸納法與遞迴關係式

觀念三　數學歸納法與遞迴關係式

【例說】已知數列 $\{a_n\}$ 的首項 $a_1 = 1$，且該數列滿足 $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，其中 $n \in N$，則：

1. 試推測 a_n 的通式。
2. 試利用數學歸納法證明該推測結果成立。

【解析】1. $a_1 = 1$

$a_2 = a_1 = 1 = 2^{2-2}$

$a_3 = \underbrace{a_1}_{a_2} + a_2 = a_2 + a_2 = 2 = 2^{3-2}$

$a_4 = \underbrace{a_1 + a_2}_{a_3} + a_3 = a_3 + a_3 = 2 + 2 = 2^2 = 2^{4-2}$

$a_5 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{a_4} + a_4 = a_4 + a_4 = 2^2 + 2^2 = 2^3 = 2^{5-2}$

$\vdots$

推測 $a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2}}_{a_{n-1}} + a_{n-1} = 2^{n-2}$，$n \ge 2$

即 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2^{n-2}, n \ge 2 \end{cases}$

2. 1° 當 $n = 2$ 時，$a_2 = 2^{2-2} = 1 = a_1$ 成立

2° 設 $n = k$ $(k \ge 2, k \in N)$ 時成立，即 $a_k = 2^{k-2}$

則當 $n = k+1$ 時，$a_{k+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}_{a_k} + a_k$

$= a_k + a_k = 2a_k = 2 \cdot 2^{k-2} = 2^{1+k-2}$

$= 2^{(k+1)-2}$ 亦成立

故由數學歸納法得證，對任意自然數 n $(n \ge 2)$，$a_n = 2^{n-2}$ 恆成立

	高中三年級 數學（下） 講義第 **16** 頁	高中三年級數學（下） 第一章　第 **1** 節　主題 **4**　觀念一　無窮等比級數 **觀念一　無窮等比級數** 【公式】$-1<r<1$，$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=\dfrac{a}{1-r}\Rightarrow S=\dfrac{\text{首項}}{1-\text{公比}}$ **說明** 等比級數前 n 項之和 $S_n=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，當 $n\to\infty$ 且 $-1<r<1$，$r^n\to 0$，則無窮等比級數之和 $S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(1-0)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}$。 【例說】1. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\cdots=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{3}$ 2. $0.\overline{7}=0.777\cdots$ $=0.7+0.07+0.007+\cdots$ $=\dfrac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{7}{9}$