高中三年級上學期　數學乙
進階課程Ⅰ　課用講義

第一章　矩陣

第 1 部分　矩陣的運算

精選題一

若$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & 8 & \cdots & \cdots \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}$，則：

(1) $a_{55}=$？　(2) 若$a_{mn}=1000$，求m、n之值

答 (1) 21　(2) $m=25$，$n=32$

精選題二

設A、B、C皆為3×3矩陣，則下列敘述哪些是正確的？

(A) $AB=BA$恆成立

(B) $(AB)C=A(BC)$恆成立

(C) 若$AB=0$，則$A=0$或$B=0$

(D) 若$\det(A)\neq0$，且$AB=AC$，則$B=C$

(E) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$恆成立

答 (B)(D)

精選題三

2階方陣A、B滿足$AB=BA=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$：

(1) 用a，b，c，d表示A^{-1}

(2) 求證$B=A^{-1}T=TA^{-1}$，其中$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) 求證$a=d\neq0$，$c=0$

(4) 求證$A^n=\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$

答 (1) $\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$，$\Delta=ad-bc$　(2) 略　(3) 略　(4) 略

精選題四

已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，

(1) 設 $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求 $P^{-1}AP=$？ (2) 試求 $(\frac{1}{2}P^{-1}AP)^n$，$n\in N$ (3) 試求 A^n，$n\in N$

答 (1) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & \frac{n}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (3) $2^{n-1}\begin{bmatrix}2-n & n\\ -n & 2+n\end{bmatrix}$

精選題五

所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩個條件：

（甲）該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數；

（乙）該矩陣中每一行的數字相加都等於1。

以 2×2 矩陣爲例，$\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.8 & 0.7\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0.9 & 0.6\\ 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$ 滿足（甲）（乙）這兩個條件，因此都是轉移矩陣。今設 A、B 是兩個 $n\times n$ 的轉移矩陣，請問下列哪些敘述是正確的？ 【91 數甲】

(A) A^2 是轉移矩陣　(B) AB 不滿足條件（乙）

(C) $\frac{1}{2}(A+B)$ 是轉移矩陣　(D) $\frac{1}{4}(A^2+B^2)$ 是轉移矩陣

答 (A)(C)

類題

1. 若 ω 爲 $x^3-1=0$ 之一虛根，且

$$x_1=\begin{bmatrix}0 & \omega^2 & 0\\ 0 & 0 & \omega^2\\ \omega^2 & 0 & 0\end{bmatrix},\ x_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & \omega\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & \omega & 0\end{bmatrix},\ x_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$，則 $\omega x_1+\omega^2x_2+x_3=$？

2. (1) 設 A、B 皆爲 2×2 的方陣，試說明 $(AB)^t=B^tA^t$。

   (2) $ad-bc\neq 0$，若 $\begin{bmatrix}ax+by & az+bu\\ cx+dy & cz+du\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，求 $\begin{bmatrix}ax+cz & ay+cu\\ bx+dz & by+du\end{bmatrix}=$？

3. 設 A、B 皆爲 2×2 的方陣且滿足 $\begin{cases}AB+BA=I\\ A^2=B^2=0\end{cases}$，求證：

   (1) $(A+B)^2=I$ (2) $(AB)^2=AB$ (3) T 爲 2×2 矩陣，滿足 $ABT=0\Leftrightarrow BT=0$

答 1. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 2. (1) 略 (2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 3. (1) 略 (2) 略 (3) 略

第 2 部分　方陣與平面變換

精選題一

矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換，把平面坐標 $(1,0)$，$(\sqrt{3},1)$ 分別變為 $(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$，$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$，試求：

(1) 矩陣 A　(2) 上述線性變換將點 $P(2,2)$ 變成 Q 點，求經過 P、Q 及原點 O 的圓方程式

答 (1) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$　(2) $x(x-2)+y(y-2)=0$

精選題二

點 $A_1(x_1,\ y_1)$，$A_2(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$A_n(x_n,\ y_n)$ 滿足以下線性變換：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{且} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix},\ n=2,\ 3,\ \cdots$$

O 為原點，$\overline{OA_n}$ 為 O 與 A_n 之距離，S_{n-1} 表 $\Delta OA_{n-1}A_n$ 的面積，試求：

(1) $\dfrac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_{n-1}}}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}S_k$

答 (1) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

精選題三

A 和 B 是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元素都是實數。就二階方陣所對應的平面變換來說，A 在平面上的作用是對直線 L ：$y+\sqrt{3}x=0$ 的鏡射，且知 $AB=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，請選出正確的選項。

（說明：A 將 P 點對應到 Q 點，則 L 為線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線）

(A) $AB=BA$　　(B) $A+B=0$

(C) B 所對應的平面變換是旋轉　　(D) $-A$ 是 B 的（乘法）反方陣

答 (A)(B)(D)

類題

1. 設$t\in R$, $A_t=\begin{bmatrix}3-2t & -2+2t\\ 3-3t & -2+3t\end{bmatrix}$爲一線性變換矩陣。若平面坐標上一直線$L$通過點$(3,3)$，且被$A_2$映射爲本身，求$L$（即$L$經$A_2$變換後所得直線爲本身）。

答 $y=x$或$y-3=\dfrac{3}{2}(x-3)$

第 3 部分　矩陣多項式和方程式

精選題一

(1) $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n=$？

(2) $R=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，矩陣$x$滿足$x=Rx+B$，求$x=$？

(3) $A_0=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -1 & -3\end{bmatrix}$，若$A_n=RA_{n-1}+B$，$n\in N$，求$A_n$的表達式

答 (1) $\begin{bmatrix}1 & \frac{n}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}(7-n)2^n-2 & 2^{n+1}+1\\ 1-2^{n+1} & -3\end{bmatrix}$

精選題二

已知$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，試求：

(1) $A^2-3A+2I$

(2) 用x^2-3x+2除$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$，求餘式

(3) $A^n\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+A^{n-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+\cdots+A\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=$？

答 (1) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$　(2) $(2^{n+1}-n-2)x+(-2^{n+1}+2n+3)$　(3) $\begin{bmatrix}-2^{n+1}+2n+3\\ 2^{n+2}-2n-4\end{bmatrix}$

精選題三

考慮一次方程式組$M_t\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$，其中$M_t=\begin{bmatrix}t & 1\\ 3-t & t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ t+3 & 3t+1\end{bmatrix}$，$t$爲實數。

(1) 使此方程式恆有解的充分且必要條件爲何？

(A) $t\neq 5$　(B) $t\neq 1$　(C) $t\notin\{1,\ 5\}$　(D) $t\notin\{1,\ -3,\ 5\}$　(E) $t\notin\{-3,\ 1\}$

(2) 當 t 滿足第 1 題的正確條件時，下列何者成立？

(A) 對於任何一對 a、b，此方程組恰有一組解

(B) 對於任何一對 a、b，此方程組都有無限多組解

(C) 僅只有一對 a、b，使此方程組恰有一組解

(D) 僅只有一對 a、b，使此方程組有無限多組解

(E) 有不只一對（但非所有的）a、b，使此方程組有無限多組解

若 $t=0$，$a=0$，$b=-1$，則：

(3) $\det(M_0^{-1})=$　(A) $\frac{1}{3}$　(B) $-\frac{1}{5}$　(C) $\frac{1}{15}$　(D) 1　(E) 0

(4) $x=$　(A) $\frac{1}{3}$　(B) $-\frac{1}{5}$　(C) $\frac{1}{15}$　(D) 1　(E) 0

(5) $y=$　(A) $\frac{1}{3}$　(B) $-\frac{1}{5}$　(C) $\frac{1}{15}$　(D) 1　(E) 0

答 (1) (D)　(2) (A)　(3) (C)　(4) (C)　(5) (B)

精選題四

設 M 為 3×2 矩陣，而且 $M\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\2&0\\1&0\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\\0&3\end{bmatrix}$，則 $M\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=$ ＿＿＿＿＿。

答 $\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{bmatrix}$