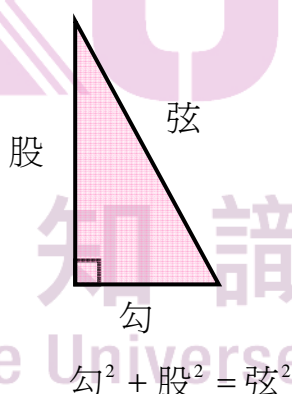


## 畢氏定理（商高定理）的介紹

追溯歷史的發展，畢氏定理中的畢氏即指古希臘的畢達哥拉斯（*Pythagoras*，約西元前 580-550 年），他是公元前五六世紀時的古希臘數學家。相傳畢達哥拉斯發現這個定理後，宰了 100 頭牛來慶祝，故「畢氏定理」又稱「百牛定理」。不過對畢氏發現畢氏定理，歷史上其實並無確實的記載，甚至許多證據顯示畢氏並沒有發現畢氏定理，但由於早期許多學者以為如此，並且許多人已經習慣這個名稱，故沿用至今。在希臘最早而嚴格的證明是在歐基里得（*Euclid*，約西元前 330-275 年）所編寫的《幾何原本》（*Elements*）中。

### 畢氏定理在國內數學界命名的爭議

畢氏定理又稱「商高定理」、「陳子定理」、「勾股定理」。在中國文獻中，最早是在一本名為《周髀算經》古書上記載著畢氏定理的存在。在國內也曾有人展開關於這個定理命名問題的討論。有人主張叫做「商高定理」，理由是中國在商高時代（約公元前 1100 年）已經知道「勾三股四弦五」的關係，並且早於畢達哥拉斯時代。也有人認為商高發現三角形邊長 3：4：5 能構成直角三角形，僅僅是特例，到陳子才提出了一般化的定理，故應稱為「陳子定理」。後來決定不用人名而稱為「勾股弦定理」，最後確定叫「勾股定理」，因為有勾股就必有弦，故弦字可以省略。



《周髀算經》基本上是一部探討天文學的著作，在其中也提及一些在數學上的發現。這部書是用對話的形式寫成的。以下簡單列出在《周髀算經》中談到關於畢氏定理之文獻記載，供同學們參考。

#### （一）關於商高的文獻記載

在書中記載約公元前 1100 年西周時，周公和商高的一段對話「折矩以為勾廣三、股修四、徑隅五。」意思就是把一跟直尺折成一個直角，如果短的一段（稱為「勾」）是 3，較長的一段（稱為「股」）是 4，那麼尺的兩端距離（直角三角形的斜邊——「弦」）便是 5。

#### （二）關於陳子的文獻記載

此對話雖已清楚指出勾三、股四、弦五的關係，但是否已掌握普遍的勾股定理，尚未有足夠的證據來確定。而知道普遍的勾股定理，可算是陳子（約公元前六、七世紀）了。在《周髀算經》上寫道陳子測日的方法：「若求邪（同斜）至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，并而開方除之，得邪至日……十萬里」其中「勾股各自乘，并而開方除之」的意思指的就是直角三角

形存在著三邊關係： $勾^2 + 股^2 = 弦^2$ 。

### 畢氏定理的證明

(一) 古巴比倫關於陳子的文獻記載

在原古巴比倫所在地出土了一塊西元前 1000 年的泥版（如右圖），從雕刻的圖案可見至今最古老的「畢氏定理」證明。



所謂的「勾股數」或「畢氏數(*primitive Pythagorean triple*)」指的就是像(3, 4, 5)這樣的一組能作為直角三角形的邊且三數互質的正整數。一塊編號為<普林頓 322>的巴比倫泥板，就記載著至少 15 組勾股數。這塊泥板目前存放在哥倫比亞大學。

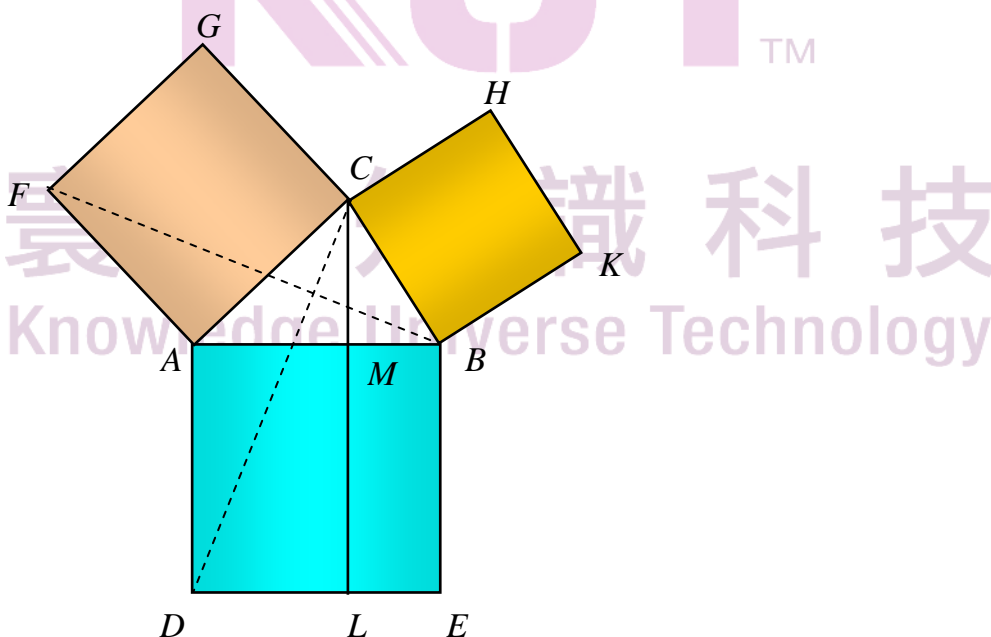
常用的勾股數：(3, 4, 5)(5, 12, 13)(7, 24, 25)(8, 15, 17)等，由此可知古巴比倫人的成就有多大！

(二) 10 種證法

畢氏定理是數學上極重要又簡潔的單一定理，古往今來，世界上不同文化、年代的數學家從不同角度來探討或證明，其證明方式有四百多種，是最多證明的數學定理。

茲列舉幾種證明方式：

#### 【證法一】幾何原本中畢氏定理的證明



在  $\triangle BAF$  與  $\triangle DAC$  中

$$\because \overline{AD} = \overline{AB}, \overline{FA} = \overline{AC}, \angle DAC = 90^\circ + \angle CAB = \angle FAB$$

$$\therefore \triangle BAF \cong \triangle DAC \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \triangle ACFG \text{ 的面積} = 2 \times \triangle BAF \text{ 的面積 (同底等高)}$$

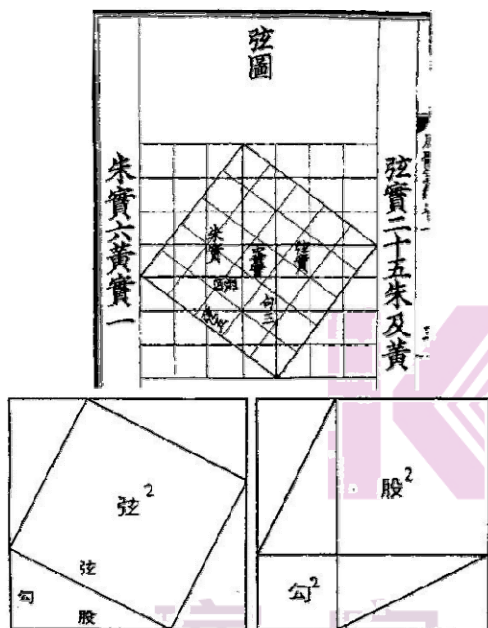
$$AMLD \text{ 的面積} = 2 \times \triangle DAC \text{ 的面積 (同底等高)}$$

$$\therefore \triangle ACFG \text{ 的面積} = AMLD \text{ 的面積}$$

同理可證， $BCHK$  的面積 =  $BMLE$  的面積  
 $\therefore ACGF$  的面積 +  $BCHK$  的面積 =  $ABED$  的面積

$$\Rightarrow \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

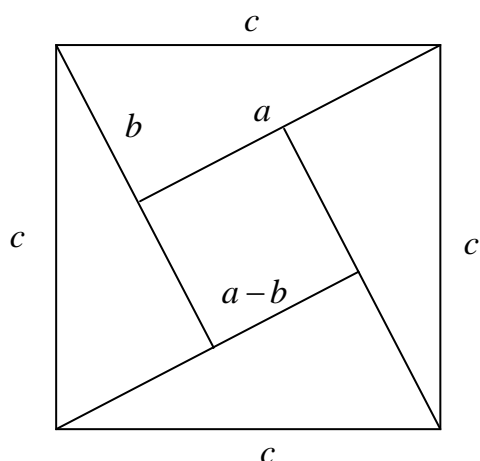
【證法二】



漢朝趙君卿證明〈商高定理〉的方法

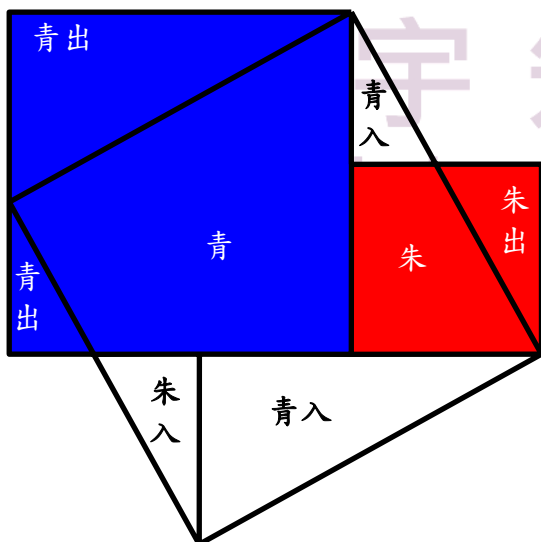
左下圖的兩個大正方形面積相等，  
 同時減掉四個相同的直角三角形，  
 即為  $\text{弦}^2 = \text{勾}^2 + \text{股}^2$

【證法三】



在中國，最先明確證明勾股定理的是漢朝數學家趙君卿，他在注《周髀算經》中，用4個同樣大小的直角三角形，將他們拼成左邊的圖形，再用代數式來證明商高定理  
 大正方形的面積 = 4個直角三角形 + 1個小正方形  
 即  $a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

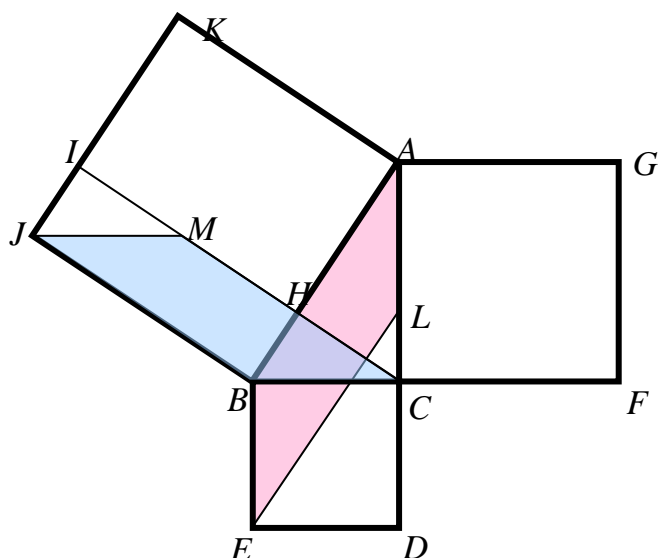
【證法四】



劉徽注文：「勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不動也，合成弦方之畧。」

他是用以盈補虛的方法，用不同的顏色來標記有關的圖形。

【證法五】



作  $\overline{EL} \parallel \overline{BA}$ ， $\overline{CI} \parallel \overline{BJ}$ ， $\overline{JM} \parallel \overline{BC}$

平行四邊形  $ABEL$  的面積 = 平行四邊形  $JBCM$  的面積

平行四邊形  $ABEL$  的面積 = 正方形  $BCDE$  的面積

平行四邊形  $JBCM$  的面積 = 長方形  $JBHI$  的面積

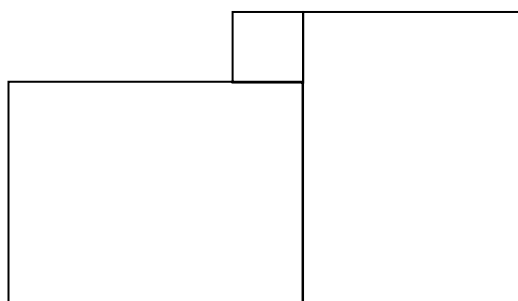
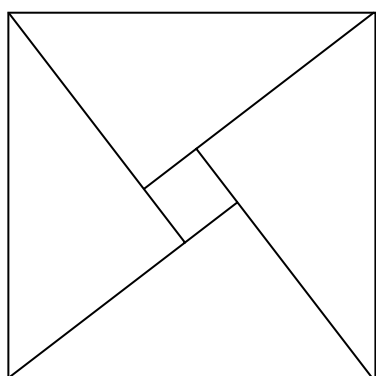
∴ 正方形  $BCDE$  的面積 = 長方形  $JBHI$  的面積

同理可證，正方形  $ACFG$  的面積 = 長方形  $AHIK$  的面積

∴ 正方形  $BCDE$  的面積 + 正方形  $ACFG$  的面積 = 正方形  $ABJK$  的面積

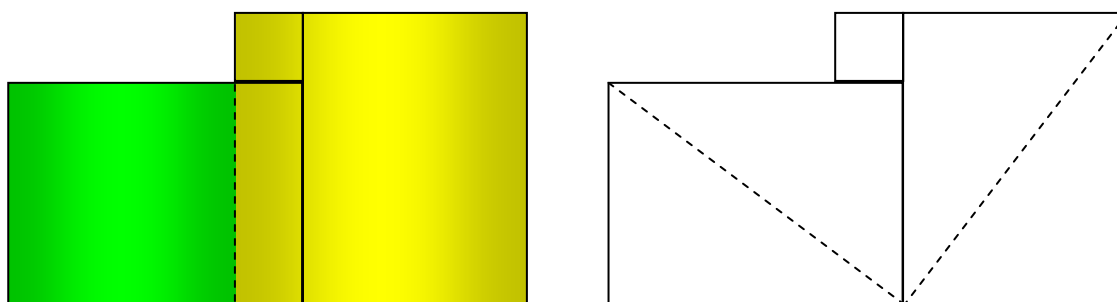


【證法六】

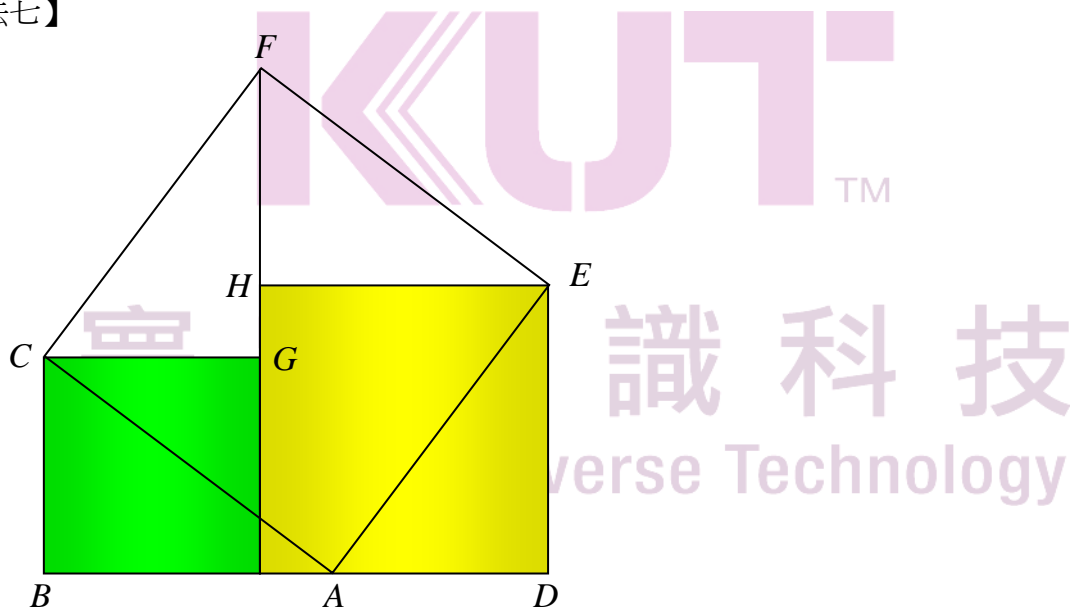


此證明是印度的數學家巴斯卡拉（公元 1114-1185 年）所做的，他把左上方兩個圖畫在一起，而只說一聲「看！」

後人再畫出左下方兩個圖，便明瞭此為畢氏定理的證明。

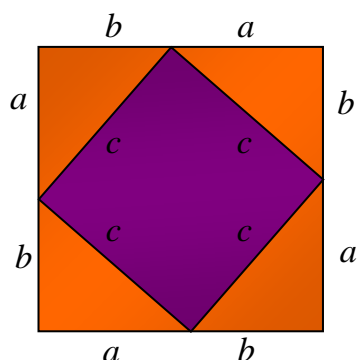


【證法七】



這是中國的梅文鼎（1633-1721 年）及日本的建部賢弘（1664-1721 年）所做的證明  
 $\triangle AED$  順時針旋轉 90 度可重疊於  $\triangle EFH$   
 $\triangle ABC$  逆時針旋轉 90 度可重疊於  $\triangle FCG$

【證法八】



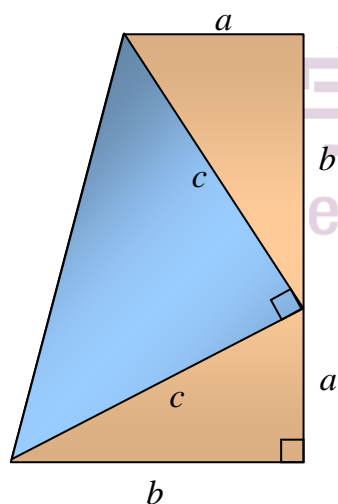
《周髀算經》中的弦圖亦含有左邊的圖形，可用現在的代數式來證明商高定理。大正方形的面積=4個直角三角形+1個小正方形

$$c^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2} \times a \times b\right) = (a+b)^2 \Rightarrow c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$



【證法九】



這是美國第二十屆總統加菲爾德在擔任共和黨議員時所提出的證明。當時他還調皮的說：此證明得到兩黨議員“一致贊同”

梯形面積等於三個直角三角形面積和

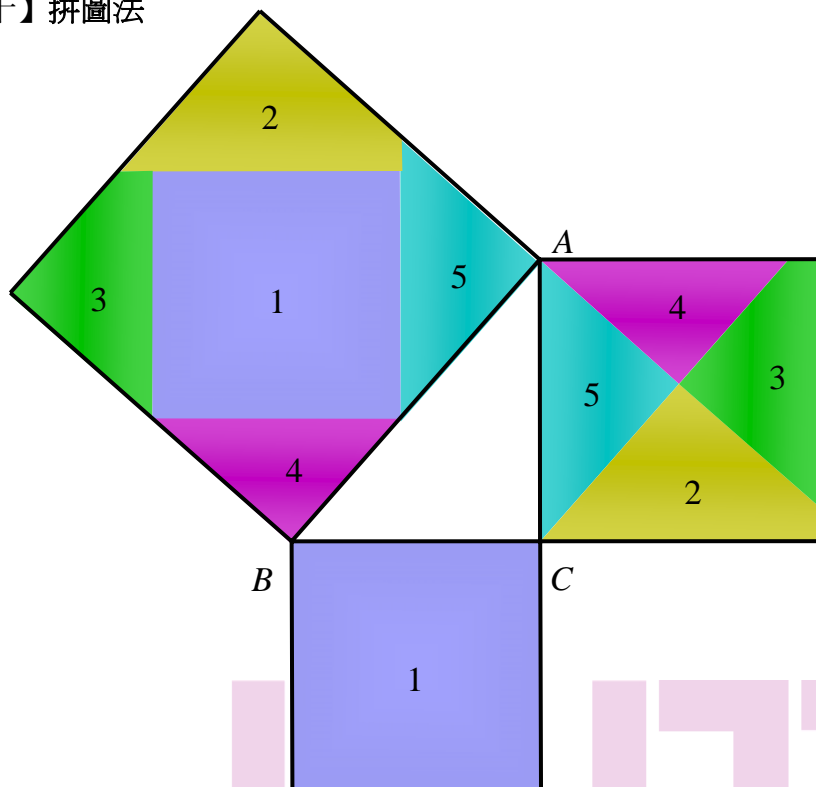
$$\frac{(a+b) \times (a+b)}{2} = \frac{1}{2} \times a \times b \times 2 + \frac{1}{2} \times c \times c$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 2ab + c^2$$

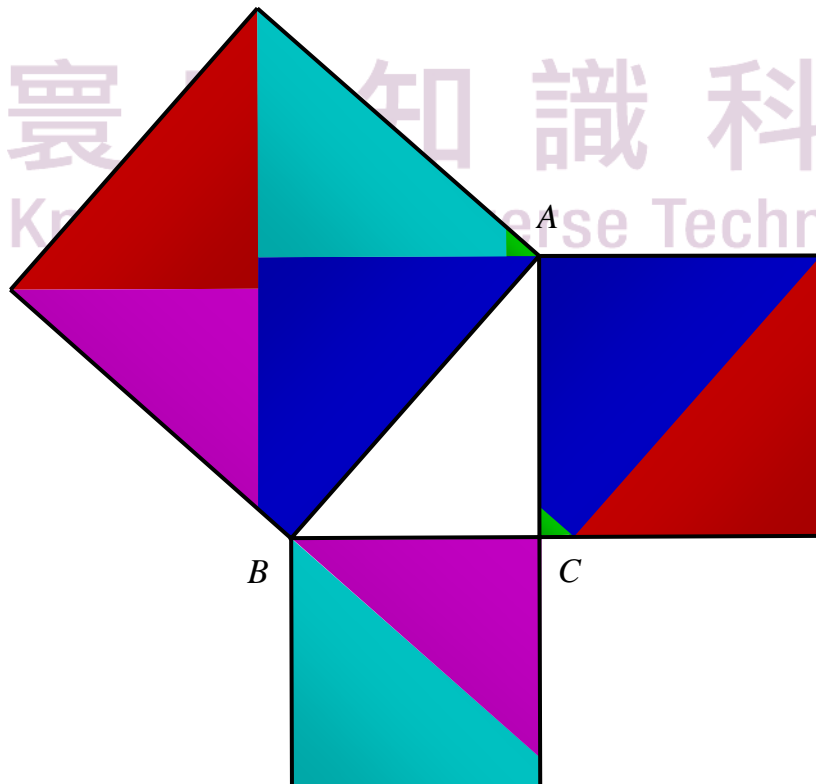
$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

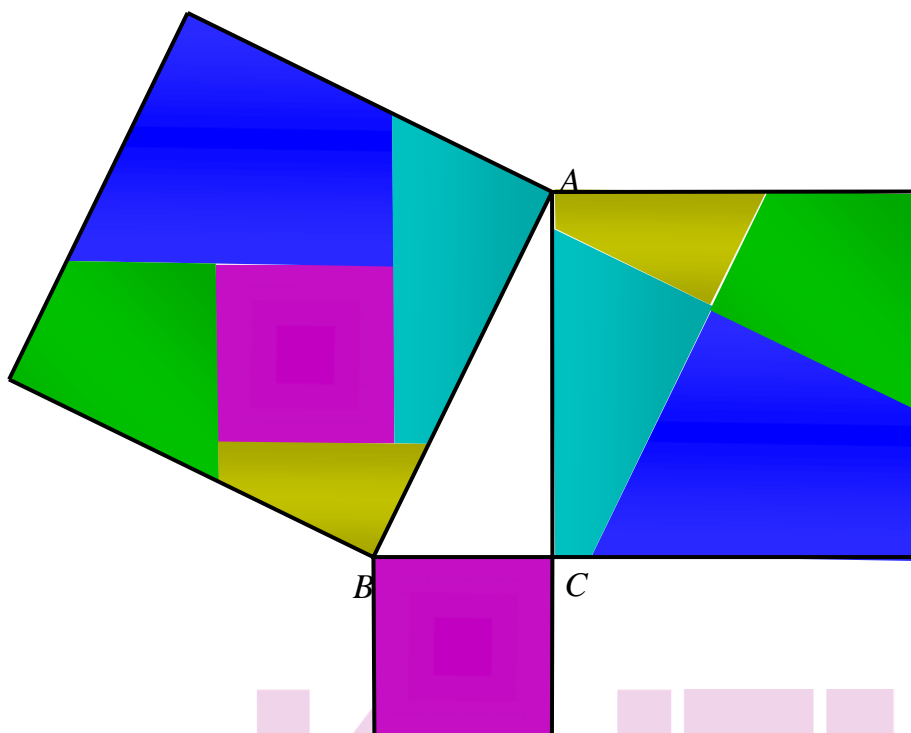
【證法十】拼圖法



在大野真一著的『畢氏定理』引用適當剪裁在兩股上的正方形，用他們填充寫在斜邊上的正方形。







### 結語

開普洛（17 世紀德國科學家）曾說：幾何學有兩個寶藏，一個是勾股定理，一個是黃金分割。數學就是這麼一門奇妙的學問，遠至四千年前巴比倫人已懂得畢氏定理，深信在往後的日子裡，人類依然學習畢氏定理，仍會為這文化瑰寶的美麗、和諧性質而激賞，一代又一代，永無止息的傳承發展下去。

Knowledge Universe Technology

### 參考資料：

- 數學的故事（列志佳、簡佩華、黃家鳴，主編九章出版社）
- 中國數學五千年（李信明著）
- 數學答問集（曾煥華譯）