成為首富的機率是多少呢？

同學們，請想像一下：當你左手拿著統一發票，右手拿著樂透彩券，一旦同時中了統一發票特獎以及樂透彩的頭彩，那不只是「發了」二字可以形容！這樣的發財機會高不高？換個角度來說，能同時中統一發票特獎和中樂透彩的頭彩，這樣的可能性有多高？

天外飛來橫財，是機率的問題；夏天到溪邊戲水，無意間低頭向溪底望去，可能可以撿到一張百元小鈔，也是機率問題。機率問題既是如此生活化，也因此成了升大學測重要且常考的範圍，不過數學科大考應試心法向來首重概念的清楚與觀念的活化，往往只需利用幾個簡單的觀念就能將看似很難的問題迎刃而解！

要如何掌握學好機率的要訣？筆者提出一個曾經在國際數學競賽考過的題目先讓同學們試著做做看！等做完之後，再請繼續往下看吧！

一個有趣的機率問題

題目如下：

當擲一枚不公平的六面骰子時，出現 F 面的機率大於 $\frac{1}{6}$，出現與 F 面的對面的那一面機率小於 $\frac{1}{6}$，且出現其他各面的機率都是 $\frac{1}{6}$；若每一面與其對面上數字的和都等於 7。當擲兩枚這種骰子時，兩枚骰子所出現的面上之數字和等於 7 的機率是 $\frac{47}{288}$。已知擲一枚這種骰子時，出現 F 面的機率是 $\frac{m}{n}$，其中 m、n 為互質的正整數，試求 $m+n$ 之值。

無論你現在是準備大考中的應屆高三畢業生，或是才剛踏入高中校園不久的高中新鮮人，這個問題都值得一做喔！

機率的加法定理和乘法定理

一般題目中的六面骰子是都是公平的，也就是說：骰子中每一面的點數出現的機率都一樣是 $\frac{1}{6}$。因此剛開始看到題目中「擲一枚不公平的六面骰子」時，或許你會楞了一下吧！不過你若能弄清楚什麼機率的加法定理和乘法定理以及何時使用，相信解出這題並不是一件難事。

（一）什麼是機率的加法定理

比如說，投擲一枚公正的骰子一次，出現偶數點的機率是多少？公正的骰子出現偶數點不外乎 2 點、4 點或 6 點。投擲一枚一次可不可能同時出現這三種點數的任兩種呢？答案當然是不可能的。因此若是將 $P(A)$ 表示成投擲一枚骰子發生 A 事件的機率，則 P(出現偶數) 應該為 P(出現 2 點)、P (出現 4 點)和 P (出現 6 點)的總和。也就是說，

$$P(\text{出現偶數}) = P(\text{出現 2 點}) + P(\text{出現 4 點}) + P(\text{出現 6 點})$$

這就是機率的加法原理！

（二）什麼是機率的乘法定理

一如本文開頭所舉的例子，中統一發票頭獎和中樂透彩的頭獎就是兩個不會互相影響的事件。將兩個不會互相影響彼此出現與否的事件 A、B（或稱為兩獨立事件）同時發生的機率 $P(A$ 且 $B)$，則 $P(A$ 且 $B)$ 和 A 事件發生的機率 $P(A)$ 與 B 事件發生的機率 $P(B)$之間的關係應為：

$$P(A\text{ 且 }B)=P(A)\times P(B)$$

這就是機率的乘法原理！

解題要訣

題目中假設一個骰子出現 F 面的機率是 $\frac{m}{n}$，但若是用兩個變數來計算，必定增加計算的複雜性，因此建議同學將骰子出現 F 面的機率假設為 p，待計算出 p 之值後，再求算出 m、n 即可！若假設如此，則出現 F 面的對面的機率應為 $1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-p=\frac{1}{3}-p$。

骰子上每一面與其對面上數字的和都等於 7，因此擲兩枚這種骰子出現的面上之數字和等於 7 的可能性有兩種：一種是兩骰子分別出現 F 面和 F 的對面，另一種是兩骰子分別出現其他四面和其對面。這兩種情形是不會同時發生的，所以發生兩個骰子數字和等於 7 的機率應為這兩種情形機率之和，也就是說符合機率的加法原理！

而不論是哪一種情形，都對兩骰子出現的面有所要求，並且要求同時發生，因此必須分別將這兩個骰子符合該情形所發生的機率相乘，也就是說必須符合乘法原理！

（一）第一種兩骰子和為 7 的情形：兩骰子分別出現 F 面和 F 面對面

若將骰子編號，在這種情形下，一號骰子出現 F 面，二號骰子必須出現 F 面的對面，兩事件必須同時成立，所以機率應該相乘，即一號骰子出現 F 面且二號骰子出現 F 面對的面的機率應為 $p\times(\frac{1}{3}-p)$（乘法原理）；反之亦然，也可能是二號骰子出現 F 面且一號骰子出現 F 面的對面，而機率也是 $p\times(\frac{1}{3}-p)$（乘法原理）。

因此兩骰子分別出現 F 面和 F 面對面的機率應為

$$p\times(\frac{1}{3}-p)+p\times(\frac{1}{3}-p)=2p\times(\frac{1}{3}-p)\text{（加法原理）}$$

（二）第二種兩骰子和為 7 的情形：兩骰子都不出現 F 面和 F 面的對面

我們可以用列舉的方法分析這種情形。假設 1 點不在 F 面，也不在 F 面的對面，則出現 1 點的機率為 $\frac{1}{6}$；1 點的對面應為 6 點，也必定不在 F 面或 F 面的對面，而 6 點的機率亦為 $\frac{1}{6}$；所以一號骰子出現 1 點且二號骰子出現 6 點則符合所求。兩事件必須同時成立，所以機率應該相乘，即一號骰子出現 1 點且二號骰子出現 6 點的機率應為 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$（乘法原理）。

但一號骰子出現 1 點的可能只是非 F 面或 F 面的對面的其他四種點數的四種可能之一，因此在這種情形之下，會有四種機率爲 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ 的可能性足以成立，而這四種機率都不會同時發生，所以用加法原理，即 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=4\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$ 。

（三）綜合以上兩種情形，將兩種情況以加法原理合併起來

兩枚骰子所出現的面上之數字和等於 7 的機率是 $2p\times(\frac{1}{3}-p)+\frac{1}{9}$ ，也就是題意中的 $\frac{47}{288}$ ，即 $2p\times(\frac{1}{3}-p)+\frac{1}{9}=\frac{47}{288}$ ，經化簡可得 $192p^2-64p+5=0$ 。

因式分解的技巧

如何求解 $192p^2-64p+5=0$ ？我們可將原式假設成一可進行因式分解的式子，因此假設 $192p^2-64p+5=(ap-1)(bp-5)$ ，其中 a ， b 爲正整數，且必須符合

$$\begin{cases} ab=192 \\ 5a+b=64 \end{cases}$$

上述這一聯立方程式不一定有 (a,b) 的整數解，不過不妨一試！那麼該從何處下手呢？從 $ab=192$ 或是 $5a+b=64$ 開始？

若是從 $ab=192$ ，你會發現 (a,b) 的可能性比較多，從乘法中找尋分解可能性也比較容易遺漏，但若是從 $5a+b=64$ 下手，鎖定 a ，就會很容易的列出 a, b 的所有可能組合

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b	59	54	49	44	39	34	29	24	19	14	9

其中 a, b 相乘爲 192 者只有 $(8,24)$ ，因此 $192p^2-64p+5=(8p-1)(24p-5)=0$

故 $p=\frac{1}{8}$ 或 $\frac{5}{24}$ ，又依題意可知：出現 F 面的機率大於 $\frac{1}{6}$ ，因此 $p=\frac{5}{24}=\frac{m}{n}$

則 $m=5, n=24, m+n=29$ 即爲所求。

結語

關於上述的問題，你是否覺得很難呢？是否認同筆者所認爲的，這是一題即使是剛踏入高中校園不久的高中新鮮人也能理解的問題？關於機率的題目，其實你只要好好掌握機率的幾個基本原理，相信答對或答錯，不會只是「機率」的問題。

至於能成爲首富的機率到底有多少呢？我們來算算看。統一發票共八位數字，因此中特獎（統一號碼與特獎號碼的八個數字和位置一模一樣）的機率應爲 $\frac{1}{100000000}$ ，即一億分之一；而中樂透彩頭獎的機率約爲 $\frac{1}{5000000}$ 。根據機率計算，兩獎同時都中的機率應爲

$\dfrac{1}{100000000}\times\dfrac{1}{5000000}$（要用乘法原理），也就是說在全球 65 億的人口中只有 0.000013 人可能同時中這兩種獎項而成爲首富。

同學們，要想考上你心目中理想的大學必定比飛來橫財的機率來得更高！還是努力充實自己，靠自己的聰明才智來換取成功的果實比較實際。更有甚者，或許以後你會成爲你的專業領域中的另一個比爾蓋茲呢！